

**Российская академия архитектуры и строительных наук
РААСН**

Научный совет «Программные средства в строительстве и архитектуре»

**Верификационный отчет
по программному комплексу
MicroFe**

Отчет составил
Заместитель директора ООО Техсофт
Семенов В.А.

Москва
2009

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	8
Авторы и разработчики программы.....	9
Условия функционирования.....	9
Ограничения на программу.....	9
Возможности MicroFe.....	9
2 МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ.....	12
Конечноэлементная модель.....	12
Исходные данные конечноэлементной модели.....	16
3 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ).....	17
3.1 Проверка условий полноты конечных элементов.....	17
3.1.1 Проверка точного представления жестких смещений конечного элемента плоской задачи теории упругости.....	17
3.1.2 Проверка точного представления жестких смещений конечного элемента изгиба пластин.....	25
3.1.3 Проверка точного представления жестких смещений объемного конечного элемента теории упругости.....	32
3.1.4 Проверка точного представления состояний постоянных деформаций конечного элемента плоской оболочки.....	34
3.1.5 Проверка точного представления состояний постоянных деформаций объемного конечного элемента теории упругости.....	52
3.2 Проверка влияния искажения геометрии конечных элементов на точность результатов для КЭ плоской оболочки и теории упругости.....	57
3.3 Защемленная консольная пластинка с прямым изгибом.....	65
3.4 Защемленное консольное тело с чистым изгибом и прямым изгибом.....	68
3.5 Проверка влияния переменного поперечного сечения упругого тела на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки и теории упругости.....	71

3.6 Проверка влияния соотношения размеров конечного элемента на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки и теории упругости.....	74
3.7 Оценка точности результатов для КЭ плоской оболочки при трапецеидальном и параллелограммном запирациях.....	77
3.8 Проверка влияния коэффициента Пуассона на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки и теории упругости (прямоугольная область).....	81
3.9 Проверка влияния коэффициента Пуассона на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки (цилиндрическая область).....	84
3.10 Проверка влияния мембранного запирания на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки.....	86
3.11 Проверка КЭ изгибаемой плиты для чистого изгиба, поперечного сдвига и кручения.....	88
3.12 Проверка сходимости КЭ изгибаемой плиты для прямоугольной области.....	91
3.13 Проверка сдвигового запирания КЭ изгибаемой плиты.....	95
3.14 Проверка сходимости КЭ изгибаемой плиты для косоугольной области.....	99
3.15 Проверка сходимости КЭ изгибаемой плиты для круговой области...	101
3.16 Проверка наличия у матрицы жесткости мод с нулевой энергией (соосно нагруженная плита).....	104
3.17 Проверка наличия у матрицы жесткости мод с нулевой энергией (плита опертая в угловых точках).....	106
3.18 Цилиндрическая панель под действием собственного веса (крыша Scordelis-Lo).....	108
3.19 Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (торцы оперты на диафрагму).....	110

3.20	Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (торцы свободны)....	112
3.21	Пространственная Z-образная пластинчатая конструкция.....	114
3.22	Замкнутая сферическая оболочка.....	116
3.23	Действие сосредоточенной силы на плоскую границу полупространства (задача Буссинеска).....	118
4	ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (ЛИНЕЙНАЯ СТАТИКА)....	121
4.1	Консольная балка под сосредоточенной нагрузкой.....	121
4.2	Консольная балка под действием сосредоточенной силы с учетом влияния сдвига.....	123
4.3	Расчет балочной конструкции.....	125
4.4	Защемленная по концам балка, нагруженная равномерно-распределенным давлением.....	128
4.5	Трехступенчатая шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенными силами.....	130
4.6	Разрезанное круговое кольцо, нагруженное в плоскости оси кольца сосредоточенными силами.....	132
4.7	Кольцо при нагружении в его плоскости распределенной нагрузкой.....	134
4.8	Продольно-поперечный изгиб балки.....	136
4.9	Вертикальный консольный стержень.....	138
4.10	Двухшарнирная арка.....	140
4.11	Балка с затяжкой.....	141
4.12	Плоская ферма.....	142
4.13	Пространственная шарнирно-стержневая система.....	143
4.14	Круговая шарнирно опертая пластина, нагруженная распределенной нагрузкой.....	145
4.15	Круговая жестко заделанная пластина под распределенной нагрузкой...	147
4.16	Кольцевая пластина шарнирно опертая по наружному контуру под распределенной нагрузкой.....	149

4.17 Квадратная пластина свободно опертая по периметру нагруженная равномерно распределенной нагрузкой.....	151
4.18 Кручение консольной тонкой плиты.....	153
4.19 Шестиугольная правильная пластина, защемленная по контуру, под действием равномерно распределенной нагрузки.....	154
4.20 Определение изгибающих моментов в заделанной пластине постоянной толщины при температурном нагружении.....	156
4.21 Криволинейный брус (задача Головина).....	158
4.22 Клин с сосредоточенной силой (задача Мичела).....	160
4.23 Изгиб клина моментом (задача Инглиса).....	162
4.24 Изгиб клина распределенной нагрузкой (задача Леви).....	164
4.25 Треугольная подпорная стенка.....	166
4.26 Действие на плоскость сосредоточенных момента и силы.....	168
4.27 Растяжение пластины с малым круговым отверстием (задача Кирша).....	170
4.28 Балка-стенка под равномерно-распределенной нагрузкой.....	172
4.29 Квадратная пластинка, оконтуренная стержнем.....	174
4.30 Цилиндрическая оболочка под внутренним давлением.....	179
4.31 Короткая цилиндрическая оболочка, свободно опертая по торцам...	181
4.32 Цилиндрическая оболочка с защемленным краем под действием нагрузки, линейно изменяющейся вдоль образующей.....	182
4.33 Определение температурных напряжений в круговой цилиндрической оболочке постоянной толщины.....	185
4.34 Пространственная пластинчатая система.....	187
4.35 Пространственная коробчатая система.....	189
4.36 Толстая квадратная плита защемленная по контуру.....	192
4.37 Толстая круглая плита защемленная по контуру.....	196
4.38 Разрезное кольцо.....	200
5 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ).....	201
5.1 Свободные колебания изогнутого пространственного стержня.....	201
5.2 Свободные колебания квадратной пластины опертой по контуру.....	203

5.3 Свободные изгибные колебания прямоугольной пластины опертой по контуру.....	205
5.4 Свободные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру.....	208
5.5 Свободные колебания квадратной консольной пластины.....	210
5.6 Свободные колебания круглой защемленной пластины постоянной толщины.....	212
5.7 Свободные колебания круглой опертой по контуру пластины постоянной толщины.....	214
5.8 Свободные колебания защемленной по торцам круговой цилиндрической оболочки.....	216
5.9 Свободные колебания консольной цилиндрической панели.....	218
5.10 Свободные колебания цилиндрической пружины.....	220
5.11 Расчет фермы на действие мгновенного импульса.....	222
5.12 Нестационарные и гармонические колебания балки постоянного сечения с двумя сосредоточенными массами.....	224
5.13 Гармонические колебания балки постоянного сечения с распределенной массой.....	228
5.14 Кинематическое возбуждение консоли с сосредоточенной массой...	230
6 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (ЛИНЕЙНО-УПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ).....	231
6.1 Устойчивость рамы.....	231
6.2 Устойчивость консольного тела.....	233
6.3 Устойчивость однопролетного тела.....	235
6.4 Устойчивость двутавра при выпучивании из плоскости.....	237
6.5 Устойчивость однопролетного тела при температурном воздействии.....	238
6.6 Устойчивость опертой пластинки.....	240
6.7 Устойчивость пластинки с несмещаемыми кромками.....	242
6.8 Устойчивость пластинки с кинематическим воздействием.....	244
6.9 Устойчивость пластинки при чистом сдвиге.....	246
6.10 Устойчивость ребристой пластины.....	248

6.11 Устойчивость защемленной по торцам оболочки от внешнего давления...	250
6.12 Устойчивость тонкостенной оболочки.....	252
7 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ).....	254
7.1 Расчет балочной конструкции с односторонними связями.....	254
7.2 Жесткая балка на подвесках.....	257
7.3 Квадратная плита на одностороннем жестком основании.....	259
7.4 Расчет плоской нити.....	260
7.5 Вантовая система с вертикальными нагрузками.....	261
7.6 Большие перемещения квадратной мембраны.....	263
7.7 Большие перемещения круглой мембраны.....	264
7.8 Большие перемещения Z-образной консоли.....	265
7.9 Большие перемещения защемленной круговой арки.....	268
7.10 Изгиб полосы в цилиндрическую оболочку.....	270
7.11 Пластическое сжатие соосных труб.....	272
7.12 Изгиб железобетонной плиты опертой в четырех точках.....	274
7.13 Физически нелинейная устойчивость стальной колонны.....	276
7.14 Предельное равновесие стальной рамы.....	279
7.15 Предельное равновесие балочной клетки.....	281
7.16 Предельное равновесие железобетонной рамы.....	283
7.17 Предельное равновесие арки.....	285
7.18 Предельное равновесие опертой квадратной плиты.....	286
7.19 Предельное равновесие прямоугольной плиты.....	288
7.20 Предельное равновесие круглых плит.....	290
7.21 Предельное равновесие тонких прямоугольных пластинок.....	291
7.22 Предельное равновесие цилиндрической оболочки.....	293
7.23 Предельное равновесие сферического сегмента.....	295
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	296
ЛИТЕРАТУРА.....	298

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Программный комплекс MicroFe является системой программ, основанной на методе конечных элементов, предназначенной для расчета строительных конструкций и разработанной для использования на автоматизированных рабочих местах (АРМ) под управлением операционной системы Windows-2000, Windows NT, Windows XP и Windows Vista. Программа отличается использованием высокоэффективных расчетных алгоритмов и удобством для пользователя. Все это позволяет инженеру выполнять необходимые расчеты непосредственно на своем рабочем месте.

MicroFe отвечает всем современным требованиям, предъявляемым к программам, находящимся в промышленной эксплуатации.

- ◆ Эффективные возможности генерации рассчитываемой модели в интерактивном режиме
- ◆ Визуализация рассчитываемой модели и результатов расчета на мониторе, принтере или графопостроителе
- ◆ Простота модифицирования рассчитываемой модели непосредственно на экране
- ◆ Современные типы конечных элементов, в равной мере аппроксимирующие усилия или напряжения и деформации
- ◆ Современные высокоэффективные решатели СЛАУ работающие в параллельном режиме
- ◆ Работа в 64-х разрядном режиме при минимальных технических требованиях
- ◆ Выборочный вывод результатов расчета
- ◆ Возможность связи с другими программами проектирующей системы Ing+

В основу совершенствования программ и модулей комплекса заложен принцип преемственности, по которому более поздние модификации обеспечивают реализацию возможностей более ранних. Наличие модульной структуры и соблюдение этого принципа создает условия, когда модификация комплекса в какой-либо части (включение дополнительного модуля, совершенствование существующего) практически требует дополнительной верификации только в этой части и проверки отсутствия привнесенных ошибок.

1.1 Авторы и разработчики программы

Программный комплекс MicroFe версии 2009 разработан фирмами mb AEC Software GmbH (Германия, г.Кайзерслаутерн) и ООО Техсофт (Россия, Москва). Авторы программы: Dipl.-Ing. J.G.Loewenstein, Dipl.-Ing. K.Ben-Hamida, Dipl.-Ing. M.Scneider, Dr.-Ing. D.Lutzkanov (Mb AEC), д.т.н., проф. В.А.Семенов, к.т.н. П.Ю.Семенов, к.т.н. В.Л.Лебедев, Т.З.Ахметзянов, С.А.Трубников, А.В.Солдатов, к.т.н. Зебельян З.Х., к.ф.-м.н. Голованов В.А. (ООО Техсофт).

1.2 Условия функционирования

ПК MicroFe работает на компьютерах с операционными системами Windows-2000, Windows NT, Windows XP и Windows Vista. Исходный текст MicroFe написан на алгоритмическом языке программирования С. Ниже приводятся минимальные требования для компьютеров, необходимые для инсталляции. В зависимости от сложности расчета требуется не менее 30 Мбайт свободного места на жестком диске.

- тип процессора: Pentium 4 и выше
- величина оперативной памяти: 512 Мб
- объем жесткого диска: 1 Гб для операционной системы и MicroFe
- версия операционной системы: Windows-2000, Windows NT, Windows XP SP2, Windows XP 64, Windows Vista и Windows Vista 64.

1.3 Ограничения на программу

Величина проектов, которые могут быть обработаны при помощи MicroFe, определяются исключительно объемом оперативной памяти и объемом свободного места на жестком диске.

1.4 Возможности MicroFe

Статический анализ:

- ◆ 2D-балка со сдвиговой деформацией (3 степени свободы в узле)
- ◆ 3D-балка с кручением и сдвиговой деформацией (6 степеней свободы в узле)
- ◆ Балки-стенки, плитные и оболочечные элементы с 3-мя или 4-мя узлами (3 степени свободы в узле для балок-стенок и плитных элементов, 6 степеней свободы в узле оболочечных элементов)
- ◆ Жесткое или упругое закрепление в произвольной системе координат
- ◆ Нагрузки на узлы и элементы
- ◆ Температурные нагрузки для всех элементов
- ◆ Комбинации нагрузок при различных нагружениях

- ◆ Расчет перемещений, усилий в сечениях или, соответственно, напряжений
- ◆ Нелинейные связи, односторонне работающие элементы (в том числе одностороннее упругое основание и связи с трением)
- ◆ Возможность работы с различными кинематическими гипотезами
- ◆ Учет реальных размеров строительных конструкций при формировании расчетной схемы
- ◆ Физически нелинейные расчеты, в том числе для слоистого основания (нелинейные материалы типа “Грунт”, “Бетон”, “Арматура” и т.п.)
- ◆ Геометрически нелинейные расчеты плоских и пространственных комбинированных конструкций (в том числе с учетом конечных вращений)
- ◆ Устойчивость линейно упругих стержневых, оболочечных и комбинированных систем
- ◆ Устойчивость с учетом физической нелинейности стержневых систем

Динамический анализ:

- ◆ расчетная модель та же, что и при статическом анализе
- ◆ расчет собственных частот и форм колебаний (анализ собственных значений)
- ◆ реакция на воздействие гармонических и переходных нагрузок
- ◆ анализ нелинейных систем сейсмозащиты

Диалоговый режим ввода рассчитываемой модели:

- ◆ возможность генерации при помощи техники позиционного ввода строительных конструкций с произвольным разбиением на элементы
- ◆ ввод, расширение, модифицирование или удаление расчетных данных с помощью табличного редактора

Графическое изображение расчетной модели и результатов расчета:

- ◆ чертеж расчетной модели в плоскостном и перспективном изображении
- ◆ изображения исходной и деформированной конструкции, а также величин усилий и деформаций в виде изолиний и значений
- ◆ функциональные диаграммы реакций в зависимости от времени и частоты

Комбинированные элементы высокой точности:

- ◆ балки-стенки, плитные и оболочечные элементы формируются в MicroFe как гибридные элементы; напряжения и, соответственно, усилия представлены квадратичной аппроксимацией, а перемещения точки с помощью квадратичной аппроксимации. Это гарантирует то, что и напряжения и перемещения определяются с высокой точностью.

Комбинация различных типов элементов:

- ◆ механически возможные соединения различных типов элементов реализуются при вводе, расчете и при представлении результатов.

Конструктивные расчеты железобетонных и металлических конструкций в соответствии с действующими СНиП 52-01-2003, СП 52-101-2003, СНиП 2.01.07-85, СНиП 2.03.01-84, СНиП 2.02.01-83, СНиП II-7-81*, СНиП II-23-81 и нормативно-методическими материалами других стран

- ◆ Расчет пульсационной составляющей ветровой нагрузки в соответствии со СНиП 2.01.07-85, а также по другим нормативно-методическим материалам
- ◆ Расчеты на сейсмические воздействия в соответствии со СНиП II-7-81*, расчет по линейно-спектральному методу, по многокомпонентным акселерограммам, определение сейсмических нагрузок с учетом ротационных свойств воздействия и неравномерного в плане поля ускорений грунта.

Интерактивная графика:

- * удобный интерактивный графический контроль конечноэлементной модели и выборочный вывод графических результатов
- * пространственное изображение конструкций 3D
- * графическое представление узлов, элементов, граничных условий и нагрузок.

Связь ASCII:

- ◆ Для связи с математическим обеспечением, которым владеет пользователь, предлагается пересечение в формате ASCII.

Файл DXF:

- ◆ Для связи с внешними графическими средствами математического обеспечения (например AUTOCAD), предлагается пересечение в формате DXF.

Связь с CAD:

- ◆ Для связи с распространенными программами CAD (ViCADo, ProCAD, Dicad), предлагается вывод данных на соответствующее внешнее запоминающее устройство.

Модули генерации:

- ◆ Дополнительно к основному модулю MicroFe в распоряжении пользователя находятся модули генерации, служащие для сокращения затрат по вводу.

Общие возможности расчетов:

- ◆ Все общие расчеты могут выполняться в многопроцессорном режиме.
- ◆ Программа работает как в 32-х разрядном режиме, так и в 64-х разрядном режиме.

2 МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

2.1 Конечноэлементная модель

В расчетах по методу конечных элементов расчетная модель конструкции, в дальнейшем именуемая конечноэлементной моделью, состоит из набора конечных элементов, связанных между собой в узлах. Связи элементов в этих узлах реализуются с учетом наиболее важных кинематических связей реальной конструкции. Система всех взаимосвязанных узлов образует узловую сетку, отражающую геометрический образ силовой расчетной схемы исследуемой конструкции.

Конечноэлементная модель конструкции формируется исходя из физических представлений о работе конструкции и ее частей.

Геометрия конечноэлементной модели задается координатами узлов. Связи узлов между собой отражают структуру расчетной схемы - топологию.

Все узлы и элементы нумеруются возрастающей последовательностью целых чисел. Номера узлов каждого элемента образуют топологическую информацию для данного элемента.

Конечный элемент представляет собой модель области исследуемого объекта. Разными типами конечных элементов моделируется различное поведение области конструкции. Выражением свойств этой модели являются матрица жесткости и узловые нагрузки, которые определяются через размеры элемента, его геометрические характеристики, характеристики материала, приложенные распределенные нагрузки.

Независимо от вида нагрузки (распределенная, сосредоточенная, поверхностная, объемная) и ее физической основы (статическая, инерционная, весовая, температурная и т.п.) она считается в конечном счете приложенной в узлах расчетной схемы (узловые нагрузки - усилия и моменты).

На конечноэлементную модель должны быть наложены граничные условия в виде закреплений и величин заданных перемещений узлов.

Элементы балки-стенки, плиты и оболочки, используемые в программном комплексе являются треугольными и четырехугольными плоскими гибридными элементами. Для элемента балки-стенки в узле рассматривается 3 степени свободы. Для конечных элементов плоской оболочки рассматривается 6 степеней свободы в узле. Теория этих элементов дана в [1-6].

Для пространственной задачи теории упругости используются объемные конечные элементы в виде пирамид с треугольным и четырехугольным основаниями, а также конечные

элементы в виде призм с треугольным и четырехугольным основаниями с 3 степенями свободы в узле [7].

Для стержневых элементов используются матрицы жесткости (в том числе с учетом сдвига и геометрической жесткости) приведенные, например, в [8-10].

Для динамического расчета для всех типов конечных элементов используются согласованные (полные, недиагональные) матрицы масс [9,11].

Для обеспечения сходимости расчета методом конечных элементов и получения корректных результатов необходимо, чтобы используемые конечные элементы удовлетворяли следующим условиям:

1. Функции формы конечных элементов должны обеспечивать непрерывность поля перемещений на границах, разделяющих элементы.

2. Функции формы конечных элементов должны включать моды перемещений КЭ как жесткого целого.

3. Функции формы КЭ должны включать моды перемещений, соответствующие состоянию однородной деформации.

Первое условие обычно называют условием конформности, а второе и третье условия – условиями полноты. Конечные элементы (как плоские так и объемные) удовлетворяют всем этим требованиям. Удовлетворение первого условия легко видно из анализа используемых интерполяционных функций [2-6]

$$u_n = \frac{1-\xi}{2} u_{n1} - \frac{1-\xi^2}{4} \omega_1 + \frac{1+\xi}{2} u_{n2} - \frac{-1+\xi^2}{4} \frac{l}{2} \omega_2,$$

$$w = \frac{1-\xi}{2} w_1 - \frac{1-\xi^2}{4} \theta_{t1} + \frac{1+\xi}{2} w_2 - \frac{-1+\xi^2}{4} \frac{l}{2} \theta_{t2}$$

Здесь u_n - перемещение нормальное к границе элемента в его срединной плоскости, w - перемещение нормальное к границе элемента перпендикулярно его срединной плоскости. Таким образом, при изломе геометрии в пространстве, т.е. например, при переходе от горизонтальной плиты к вертикальной стене непрерывность перемещений сохраняется. Эти функции используются как для трех-, так и для четырехугольников. Поэтому при переходе через границы конечных элементов разной геометрии непрерывность перемещений также сохраняется. Выполнение второго и третьего необходимых условий, для конечных элементов используемых в MicroFe, иллюстрируется выполнением тестов из раздела 3.1. Собственно говоря, выполнение этих условий уже является достаточным для верификации корректности конечных элементов. Отметим, что из результатов приведенных в разделе 3.1, а также из соотношений использованных в [2-6] не следует требование выпуклости геометрии

четырёхугольных конечных элементов. В то же самое время выполнение этих трех условий еще ничего не говорит о качестве конечных элементов (насколько хорошо учитывают КЭ различные особенности расчетной схемы). Проверка качества используемых в ПК конечных элементов иллюстрируется специальными тестами (Pathological tests), приведенными в других параграфах раздела 3. На основе результатов этого тестирования определены оценки качества КЭ (*PTS* - Pathological Tests Score) [18]

$$PTS = \left[1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\sigma_i^* - 1)^2 + (\delta_i^* - 1)^2}{2} \right)^{1/2} \right] \times 100\%.$$

Здесь n – количество испытаний (тестов), σ_i^* , δ_i^* – нормализованные напряжения и перемещения.

Для четырехугольных элементов плоской оболочки используемых в MicroFe на основе тестов из раздела 3 получено $PTS = 93.68\%$ при $n = 232$, а для объемных элементов - $PTS = 81.91\%$ при $n = 58$, что является очень высокими характеристиками элементной базы.

Используемые алгоритмы

Для решения систем линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов используются варианты алгоритма Гаусса для схемы профильного хранения матрицы жесткости и схемы разреженного строчного формата.

Учет односторонних связей производится итерационным методом. Сначала решается задача в предположении, что все связи двухсторонние, а на следующих итерациях проверяется выполнение условий работы односторонних связей (растяжение-сжатие), в том случае если полученные реакции не удовлетворяют заданным связям, то на следующей итерации устраняются или вводятся соответствующие связи. Итерационный процесс прекращается, когда не требуется корректировка связей.

Для решения обобщенной задачи на собственные значения применяется метод итераций подпространства [11].

Для решения задачи вынужденных колебаний применяется метод разложения по собственным формам колебаний.

Подробное описание этих методов и алгоритмов имеется в многочисленной литературе (см. например [8-11]).

Для решения задач с физической нелинейностью, заданной диаграммами, для стержней и оболочек используются многослойные конечные элементы. Методики решения этих задач при помощи многослойных элементов имеются в [12,13].

Решение задач предельного равновесия осуществляется при помощи метода псевдожесткостей [14,15].

Задачи устойчивости стержневых систем с учетом физической нелинейности решаются при помощи алгоритма корректировки модулей [16].

2.2 Исходные данные конечноэлементной модели

Исходные данные к задаче включают:

- * Общие сведения
- * Системы координат
- * Координаты узловых точек
- * Топологию (нумерация узловых конечных элементов), типы конечных элементов
- * Узловые и другие типы нагрузок
- * Кинематические ограничения
- * Характеристики материалов
- * Входные данные к элементам
- * Температурные поля (температуры в узлах, элементах, перепады температур).

3 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ)

Представленная в разделе выборка примеров основана на стремлении охватить разнообразные проблемные области, использование различных конечных элементов, типов нагрузок, граничных условий.

3.1 Проверка условий полноты конечных элементов

3.1.1 Проверка точного представления жестких смещений конечного элемента плоской задачи теории упругости

1. Название задачи. Спектральные свойства матрицы жесткости (МЖ) конечного элемента (КЭ) плосконапряженного состояния (плоскодеформированного состояния).

2. Формулировка задачи. Рассматриваются треугольный и четырехугольный КЭ с различными соотношениями сторон и углов элемента. Определяются собственные значения и собственные вектора матрицы жесткости КЭ.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^{10}$ Па	- модуль упругости,
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$h = 0.2$ м	- толщина КЭ;
$l_1 = l_2 = 0.5$ м	- длины соседних сторон КЭ;
α	- угол между сторонами 1 и 2.

4. Конечноеэлементная модель. Рассматривается один треугольный или четырехугольный конечный элемент плосконапряженного состояния без краевых условий.

5. Подобласть верификации. Проверка сходимости: спектральные свойства конечного элемента (КЭ) плосконапряженного состояния (плоскодеформированного состояния). Проверялось включают ли функции формы конечного элемента моды перемещений конечного элемента как жесткого целого.

6. Аналитическое решение. Если функции формы конечного элемента содержат моды перемещений конечного элемента как жесткого целого, то три первых собственных значения матрицы жесткости равняются нулю, а соответствующие им собственные вектора представляют независимые жесткие смещения элемента:

$$(K - \lambda E)u = 0,$$

Здесь K – матрица жесткости КЭ, λ – собственные значения МЖ, E – единичная матрица, u – собственный вектор МЖ.

7. Численное решение по MicroFe.

- треугольный КЭ:

Сравнение численных результатов с аналитическим для треугольного КЭ в зависимости от угла между сторонами 1 и 2 α представлено в таблице 3.1.1.1. Через $\|K\|$ обозначена норма матрицы жесткости КЭ, $\eta = l_{max}/l_{min}$, l_{max} , l_{min} – длины наибольшей и наименьшей сторон КЭ. На рис. 3.1.1.1.а и 3.1.1.1.б приведены собственные вектора матрицы жесткости соответствующие λ_1 , λ_2 и λ_3 для $\alpha=5^\circ$ и $\alpha=175^\circ$.

Таблица 3.1.1.1

	Теория	MicroFe, α градусы									
		5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
λ_1	0	0	$1.3 \cdot 10^{-11}$	0	0	0	0	$1.7 \cdot 10^{-11}$	0	0	0
λ_2	0	$6.1 \cdot 10^{-11}$	$5.2 \cdot 10^{-10}$	0	0	$3.9 \cdot 10^{-10}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$2.8 \cdot 10^{-10}$	0	$1.8 \cdot 10^{-11}$	0
λ_3	0	$8.0 \cdot 10^{-10}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-11}$	$4.4 \cdot 10^{-11}$	$4.1 \cdot 10^{-10}$	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$4.4 \cdot 10^{-10}$	$3.4 \cdot 10^{-10}$	$2.3 \cdot 10^{-11}$	$3.6 \cdot 10^{-11}$
$\ K\ $	-	$8.0 \cdot 10^{10}$	$4.2 \cdot 10^7$	$2.2 \cdot 10^7$	$1.5 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^7$	$9.9 \cdot 10^6$	$8.8 \cdot 10^6$	$1.0 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^7$	$1.4 \cdot 10^7$
η	-	11.4	5.74	2.88	1.93	1.46	1.18	1.00	1.15	1.29	1.41

Таблица 3.1.1.1(продолжение)

	Теория	MicroFe, α градусы								
		100	110	120	130	140	150	160	170	175
λ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_2	0	0	$5.3 \cdot 10^{-10}$	0	$2.6 \cdot 10^{-10}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$	$3.7 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0	0
λ_3	0	$1.2 \cdot 10^{-11}$	$6.4 \cdot 10^{-10}$	$3.1 \cdot 10^{-10}$	$6.8 \cdot 10^{-10}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-9}$	$5.2 \cdot 10^{-10}$	$9.5 \cdot 10^{-10}$
$\ K\ $	-	$1.7 \cdot 10^7$	$2.1 \cdot 10^7$	$2.6 \cdot 10^7$	$3.2 \cdot 10^7$	$4.2 \cdot 10^7$	$5.6 \cdot 10^7$	$8.5 \cdot 10^7$	$1.7 \cdot 10^8$	$3.3 \cdot 10^8$
η	-	1.53	1.64	1.73	1.82	1.88	1.93	1.97	1.992	1.998

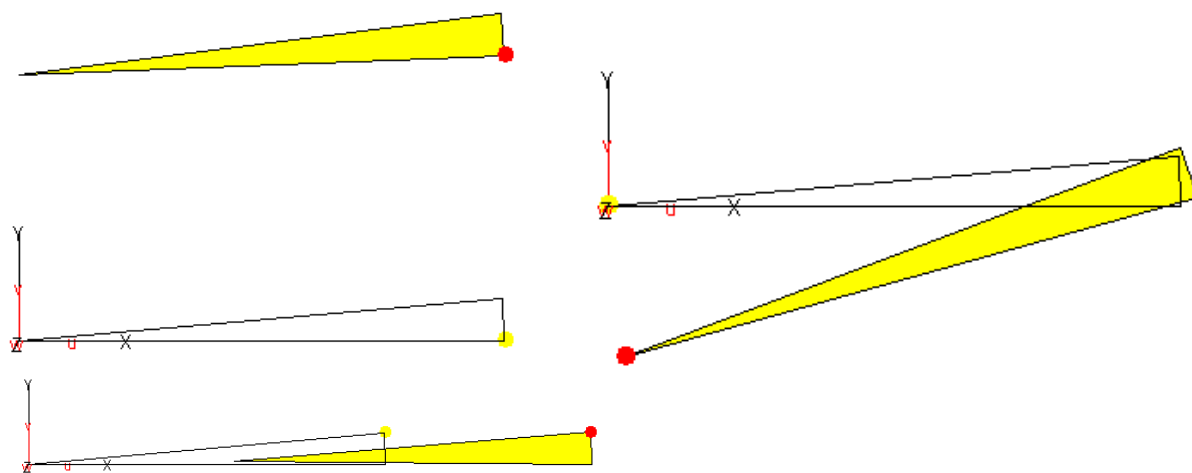


Рисунок 3.1.1.1.а

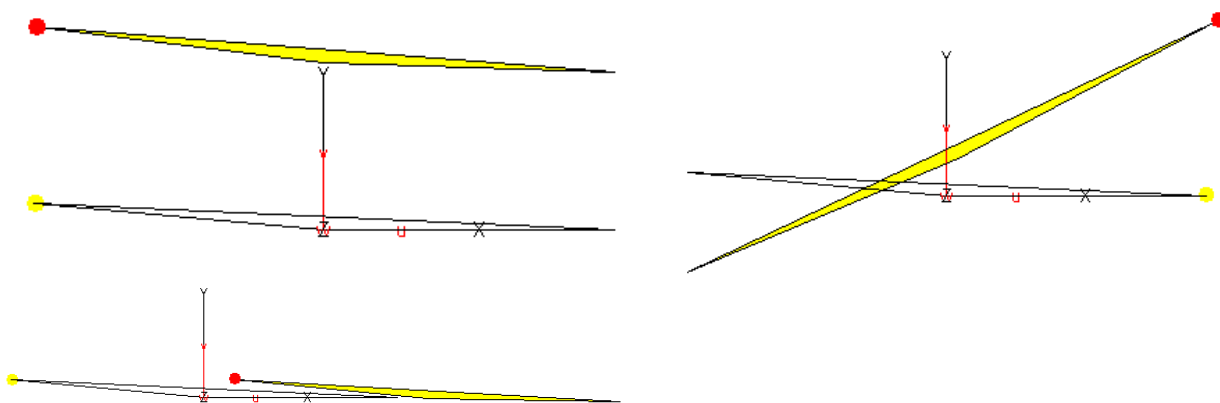


Рисунок 3.1.1.1.б

- четырехугольный КЭ с одинаковыми длинами сторон (ромбовидная структура):

Сравнение численных результатов с аналитическим для ромбовидного КЭ в зависимости от угла между сторонами 1 и 2 α представлено в таблице 3.1.1.2. Через $\|K\|$ обозначена норма матрицы жесткости КЭ. На рис. 3.1.1.2.а и 3.1.1.2.б приведены собственные вектора матрицы жесткости соответствующие λ_1 , λ_2 и λ_3 для $\alpha=5^\circ$ и $\alpha=70^\circ$.

Таблица 3.1.1.2

	Теория	MicroFe, α градусы									
		5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
λ_1	0	0	0	0	0	0	0	$1.5 \cdot 10^{-11}$	0	0	0
λ_2	0	0	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$2.6 \cdot 10^{-11}$	0	$8.6 \cdot 10^{-10}$	$6.2 \cdot 10^{-11}$	$4.9 \cdot 10^{-10}$	0	0	0
λ_3	0	0	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	0	$1.2 \cdot 10^{-9}$	$5.2 \cdot 10^{-10}$	$8.0 \cdot 10^{-10}$	0	$5.2 \cdot 10^{-10}$	$9.9 \cdot 10^{-11}$
$\ K\ $	-	$1.5 \cdot 10^8$	$7.6 \cdot 10^7$	$4.0 \cdot 10^7$	$2.6 \cdot 10^7$	$2.1 \cdot 10^7$	$1.7 \cdot 10^7$	$1.4 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^7$	$9.8 \cdot 10^6$	$8.5 \cdot 10^6$

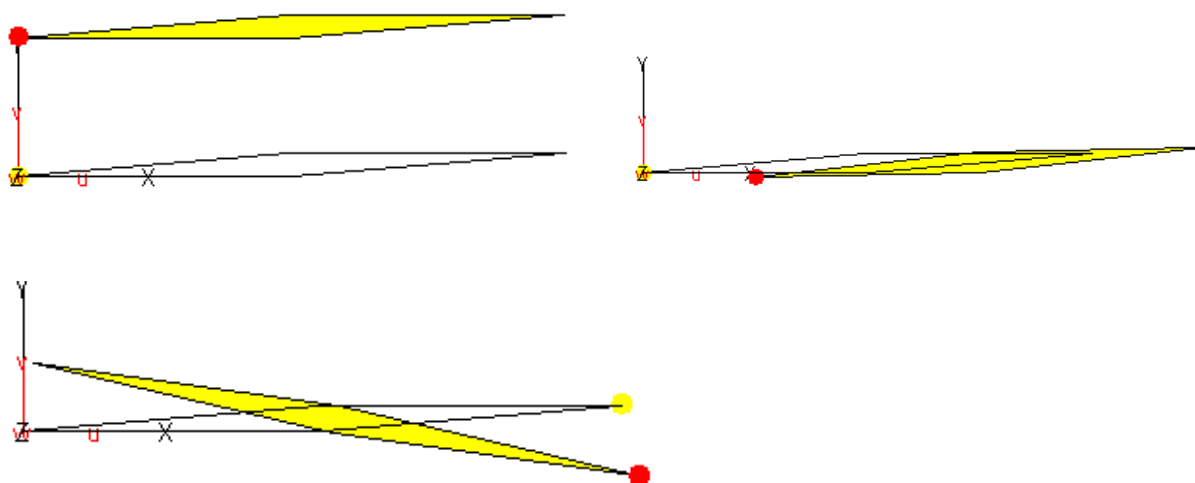


Рисунок 3.1.1.2.а

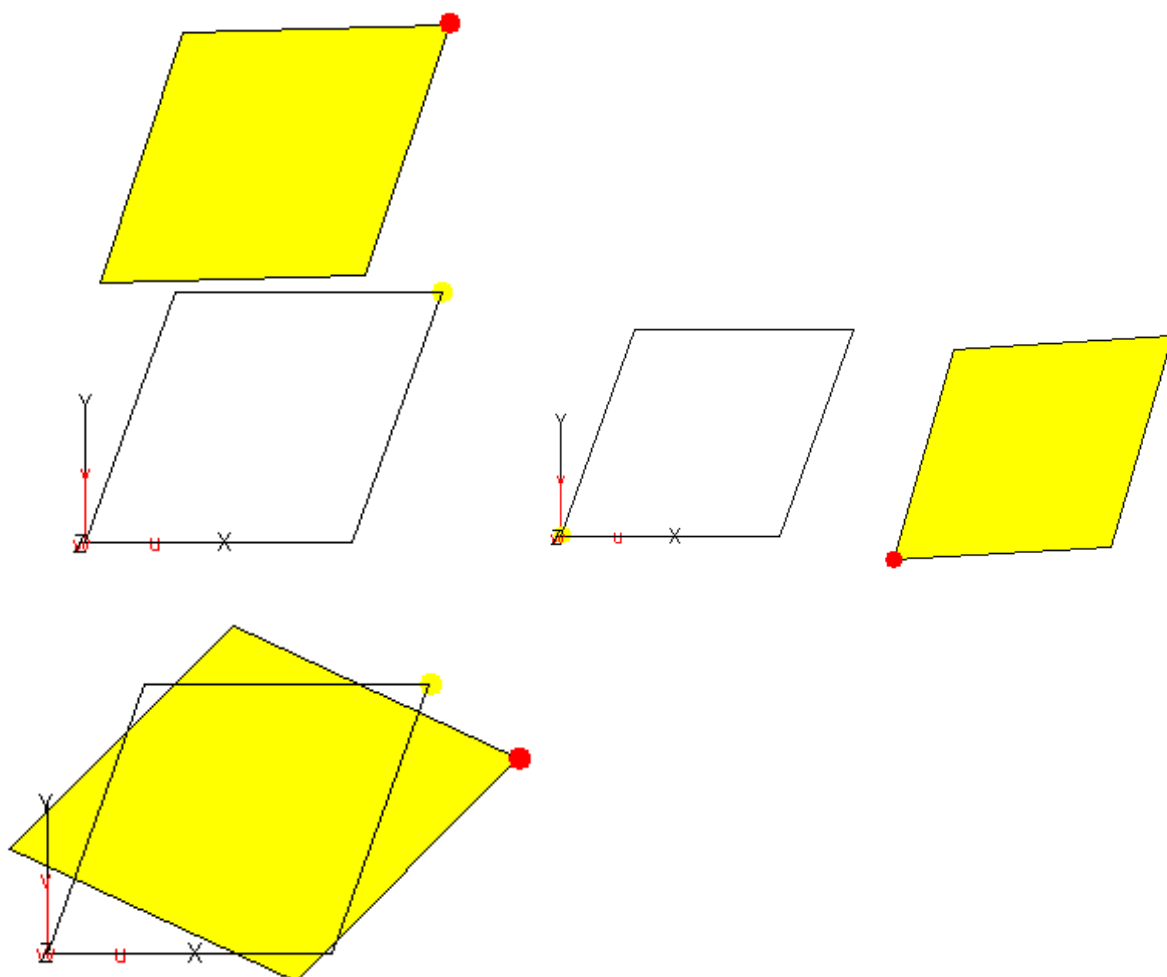


Рисунок 3.1.1.2.6

- вырожденный четырехугольный КЭ (с тремя узлами на одной прямой):

Сравнение численных результатов с аналитическим для вырожденного КЭ в зависимости от угла α представлено в таблице 3.1.1.3. Через $\|K\|$ обозначена норма матрицы жесткости КЭ. На рис. 3.1.1.3.a - 3.1.1.3.в приведены собственные вектора матрицы жесткости соответствующие λ_1 , λ_2 и λ_3 для $\alpha=1^\circ$, $\alpha=90^\circ$ и $\alpha=129^\circ$.

Таблица 3.1.1.3

	Теория	MicroFe, α градусы				
		1	5	90	129	132
λ_1	0	$2.1 \cdot 10^{-9}$	0	0	0	0
λ_2	0	$1.0 \cdot 10^{-8}$	0	$6.2 \cdot 10^{-11}$	$7.3 \cdot 10^{-8}$	$3.0 \cdot 10^{-6}$
λ_3	0	$4.9 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	0.00014
$\ K\ $	-	$1.6 \cdot 10^{10}$	$2.0 \cdot 10^8$	$1.7 \cdot 10^7$	$1.1 \cdot 10^8$	$2.3 \cdot 10^8$
η	-	84.85	17.54	1.41	6.40	13.45

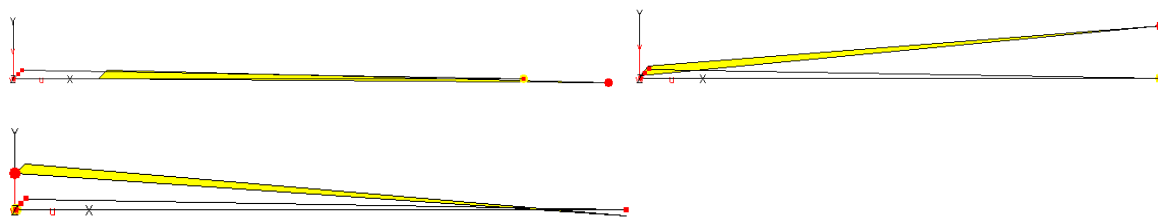


Рисунок 3.1.1.3.a

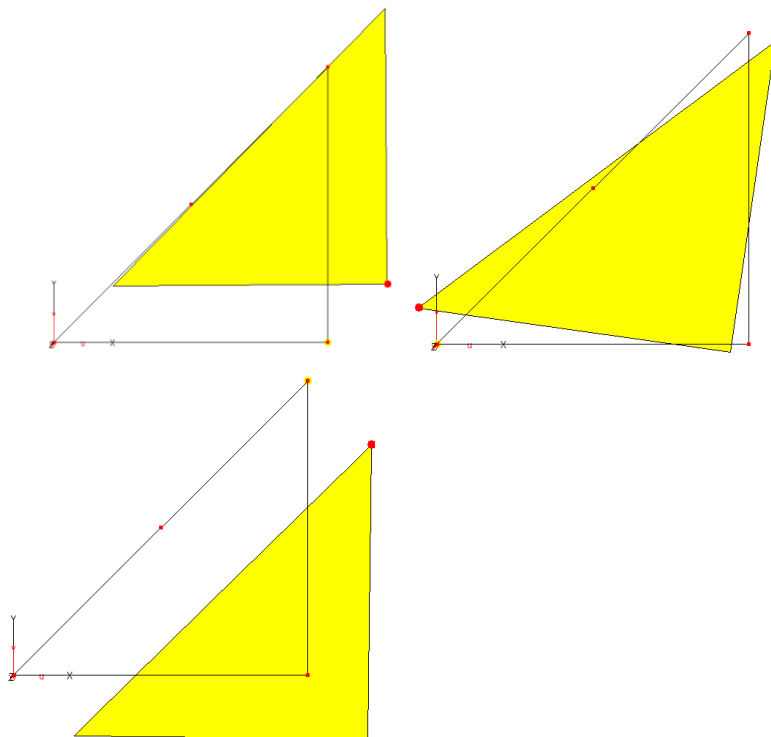


Рисунок 3.1.1.3.б

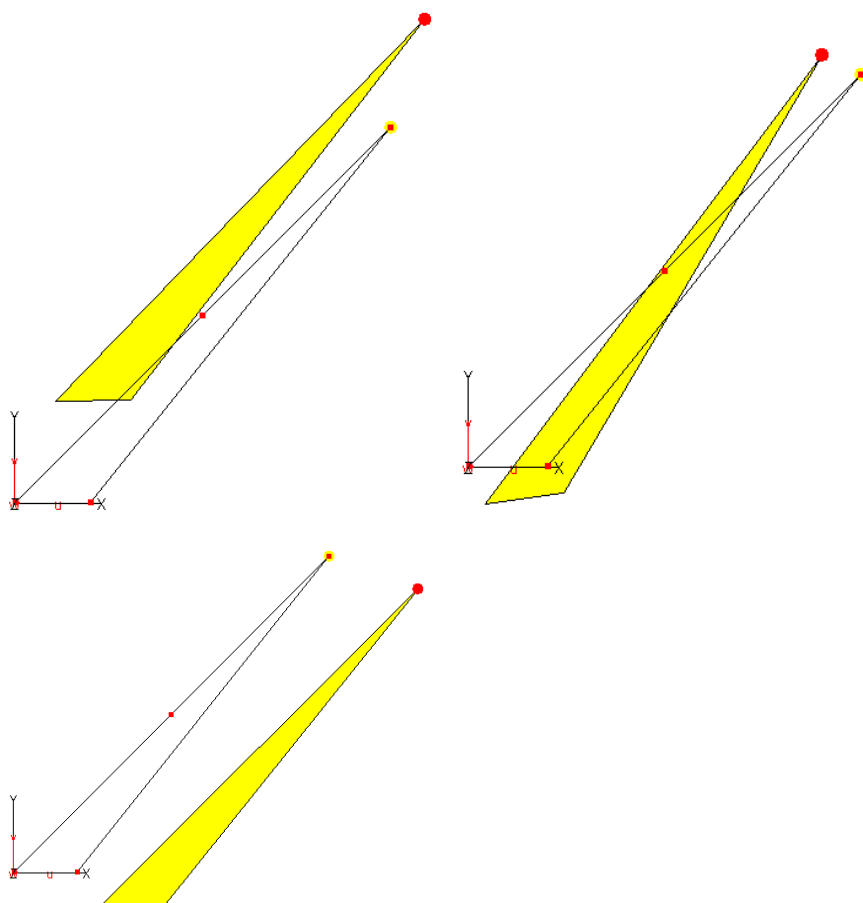


Рисунок 3.1.1.3.в

- невыпуклый четырехугольный КЭ:

Сравнение численных результатов с аналитическим для невыпуклого КЭ в зависимости от угла β представлено в таблице 3.1.1.4. На рис. 3.1.1.4 приведены собственные вектора матрицы жесткости соответствующие λ_1 , λ_2 и λ_3 для $\beta=233^\circ$.

Таблица 3.1.1.4

	Теория	MicroFe, β градусы		
		233	254	262
λ_1	0	$3.4 \cdot 10^{-11}$	0	0
λ_2	0	$5.6 \cdot 10^{-10}$	0	$1.1 \cdot 10^{-10}$
λ_3	0	$2.6 \cdot 10^{-9}$	$7.2 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
$\ K\ $	-	$3.5 \cdot 10^7$	$7.1 \cdot 10^7$	$1.4 \cdot 10^8$
η	-	1.26	1.13	1.06

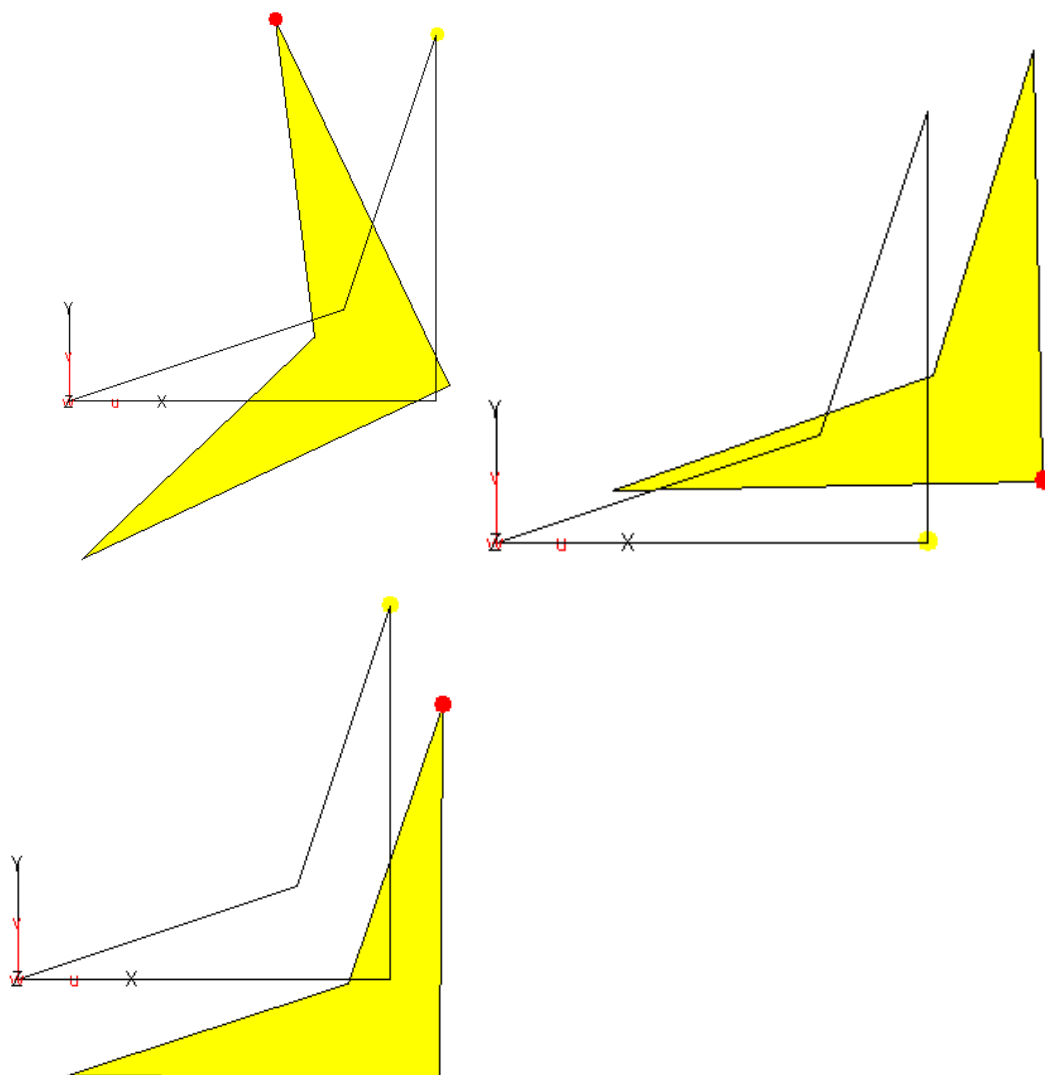


Рисунок 3.1.1.4

3.1.2 Проверка точного представления жестких смещений конечного элемента изгиба пластин

1. Название задачи. Спектральные свойства матрицы жесткости (МЖ) изгибного конечного элемента (КЭ) пластин.

2. Формулировка задачи. Рассматриваются треугольный и четырехугольный КЭ с различными соотношениями сторон и углов элемента. Определяются собственные значения и собственные вектора матрицы жесткости КЭ.

3. Исходные данные.

- $E = 3.0 \cdot 10^{10}$ Па - модуль упругости,
 $\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона,
 $h = 0.2$ м - толщина КЭ;
 $l_1 = l_2 = 0.5$ м - длины соседних сторон КЭ;
 α - угол между сторонами 1 и 2.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается один треугольный или четырехугольный конечный элемент изгибного состояния без краевых условий.

5. Подобласть верификации. Проверка сходимости: спектральные свойства конечного элемента (КЭ) изгибного состояния. Проверяться включают ли функции формы конечного элемента моды перемещений конечного элемента как жесткого целого.

6. Аналитическое решение. Если функции формы конечного элемента содержат моды перемещений конечного элемента как жесткого целого, то три первых собственных значения матрицы жесткости равняются нулю, а соответствующие им собственные вектора представляют независимые жесткие смещения элемента:

$$(K - \lambda E)u = 0,$$

Здесь K – матрица жесткости КЭ, λ – собственные значения МЖ, E – единичная матрица, u – собственный вектор МЖ.

7. Численное решение по MicroFe.

- треугольный КЭ:

Сравнение численных результатов с аналитическим для треугольного КЭ в зависимости от угла между сторонами 1 и 2 α представлено в таблице 3.1.2.1. Через $\|K\|$ обозначена норма матрицы жесткости КЭ, $\eta = l_{max}/l_{min}$, l_{max} , l_{min} – длины наибольшей и наименьшей сторон КЭ.

На рис. 3.1.2.1.а и 3.1.2.1.б приведены собственные вектора матрицы жесткости соответствующие λ_1 , λ_2 и λ_3 для $\alpha=5^\circ$ и $\alpha=175^\circ$.

Таблица 3.1.2.1

	Теория	MicroFe, α градусы									
		5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
λ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$5.1 \cdot 10^{-13}$
λ_2	0	0	0	0	0	$6.9 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-12}$	0	0	0	$5.7 \cdot 10^{-12}$
λ_3	0	0	$1.9 \cdot 10^{-12}$	$1.4 \cdot 10^{-12}$	$2.3 \cdot 10^{-12}$	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$2.2 \cdot 10^{-12}$	$1.7 \cdot 10^{-11}$	0	$1.5 \cdot 10^{-12}$	$6.4 \cdot 10^{-11}$
$\ K\ $	-	$2.6 \cdot 10^7$	$1.3 \cdot 10^7$	$6.3 \cdot 10^6$	$4.0 \cdot 10^6$	$2.8 \cdot 10^6$	$2.1 \cdot 10^6$	$1.8 \cdot 10^6$	$2.2 \cdot 10^6$	$2.6 \cdot 10^6$	$3.2 \cdot 10^6$
η	-	11.4	5.74	2.88	1.93	1.46	1.18	1.00	1.15	1.29	1.41

Таблица 3.1.2.1(продолжение)

	Теория	MicroFe, α градусы								
		100	110	120	130	140	150	160	170	175
λ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_2	0	0	$8.7 \cdot 10^{-13}$	0	0	0	$1.2 \cdot 10^{-12}$	0	$1.7 \cdot 10^{-12}$	0
λ_3	0	$2.2 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$3.1 \cdot 10^{-11}$	0	$1.2 \cdot 10^{-11}$	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$2.8 \cdot 10^{-11}$	0
$\ K\ $	-	$4.1 \cdot 10^6$	$5.2 \cdot 10^6$	$6.7 \cdot 10^6$	$8.8 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^7$	$1.7 \cdot 10^7$	$2.6 \cdot 10^7$	$5.4 \cdot 10^7$	$1.1 \cdot 10^8$
η	-	1.53	1.64	1.73	1.82	1.88	1.93	1.97	1.992	1.998

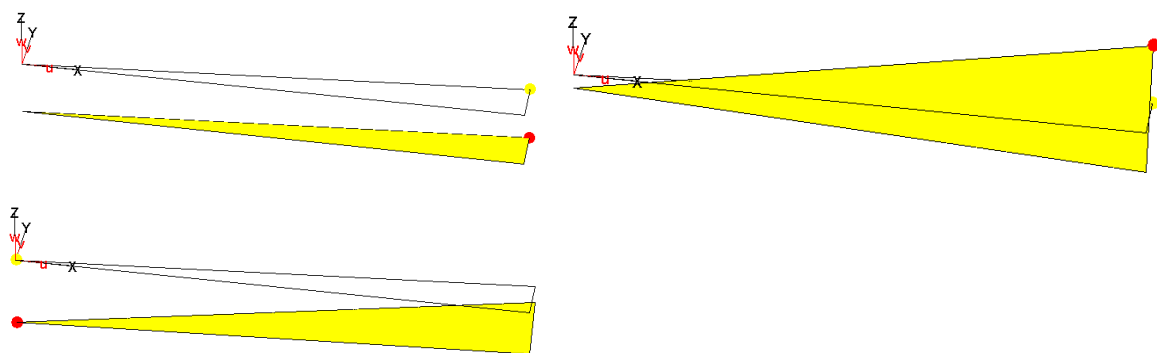


Рисунок 3.1.2.1.а

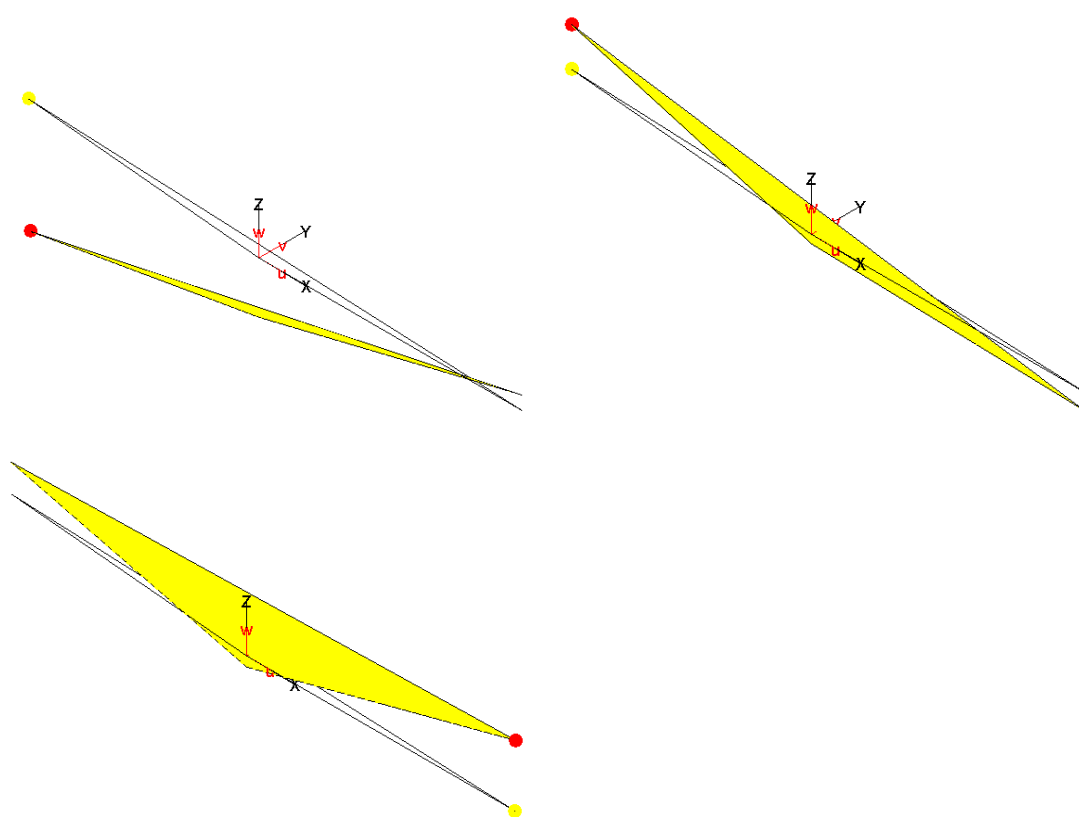


Рисунок 3.1.2.1.б

- четырехугольный КЭ с одинаковыми длинами сторон (ромбовидная структура):

Сравнение численных результатов с аналитическим для ромбовидного КЭ в зависимости от угла между сторонами 1 и 2 α представлено в таблице 3.1.2.2. Через $\|K\|$ обозначена норма матрицы жесткости КЭ. На рис. 3.1.2.2.а и 3.1.1.2.б приведены собственные вектора матрицы жесткости соответствующие λ_1 , λ_2 и λ_3 для $\alpha=5^\circ$ и $\alpha=70^\circ$.

Таблица 3.1.2.2

	Теория	MicroFe, α градусы									
		5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
λ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_2	0	0	$1.5 \cdot 10^{-11}$	0	0	0	$5.7 \cdot 10^{-12}$	0	0	0	0
λ_3	0	0	$9.8 \cdot 10^{-10}$	0	0	$6.4 \cdot 10^{-11}$	$4.5 \cdot 10^{-11}$	0	0	0	$4.2 \cdot 10^{-12}$
$\ K\ $	-	$4.8 \cdot 10^7$	$2.4 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^7$	$7.4 \cdot 10^6$	$5.1 \cdot 10^6$	$3.8 \cdot 10^6$	$2.9 \cdot 10^6$	$3.4 \cdot 10^6$	$2.0 \cdot 10^6$	$1.7 \cdot 10^6$

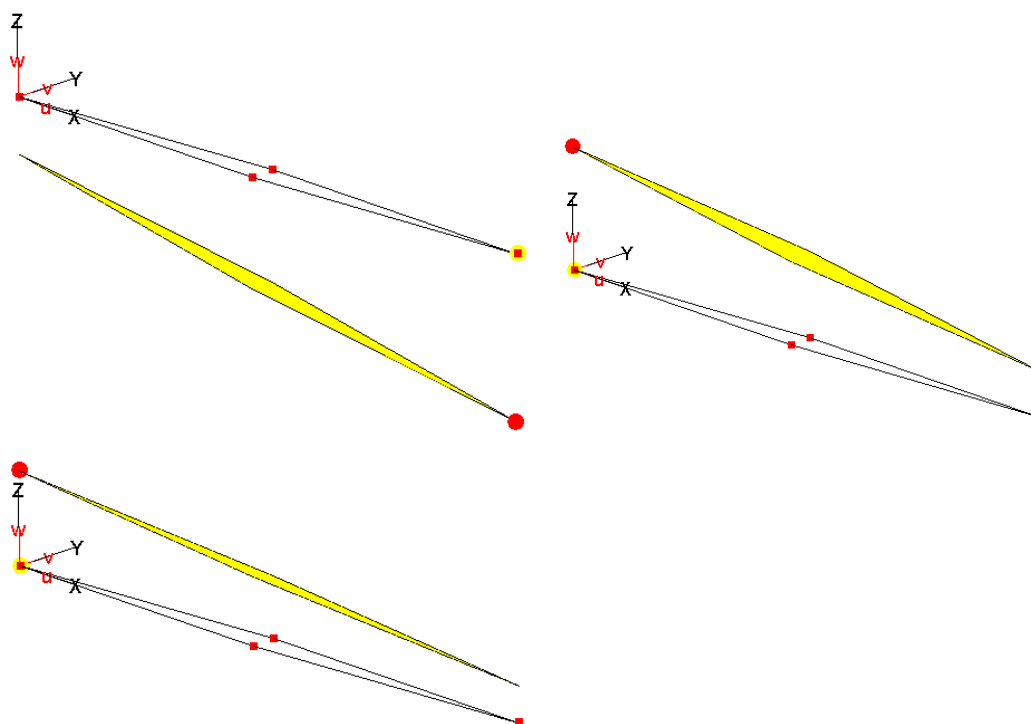


Рисунок 3.1.2.2.а

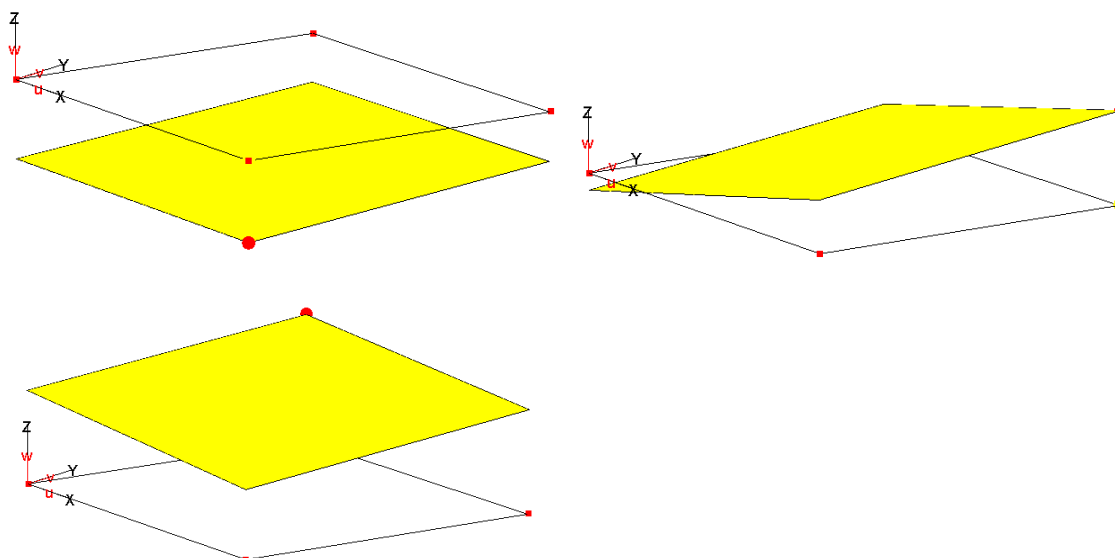


Рисунок 3.1.2.2.б

- вырожденный четырехугольный КЭ (с тремя узлами на одной прямой):

Сравнение численных результатов с аналитическим для вырожденного КЭ в зависимости от угла α представлено в таблице 3.1.2.3. Через $\|K\|$ обозначена норма матрицы жесткости КЭ. На рис. 3.1.2.3.а - 3.1.2.3.в приведены собственные вектора матрицы жесткости соответствующие λ_1 , λ_2 и λ_3 для $\alpha=1^\circ$, $\alpha=90^\circ$ и $\alpha=129^\circ$.

Таблица 3.1.2.3

	Теория	MicroFe, α градусы				
		1	5	90	129	132
λ_1	0	0	0	0	0	0
λ_2	0	0	$1.6 \cdot 10^{-10}$	0	0	0
λ_3	0	$3.5 \cdot 10^{-10}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	0	$6.2 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$
$\ K\ $	-	$3.8 \cdot 10^9$	$4.8 \cdot 10^7$	$5.8 \cdot 10^6$	$3.7 \cdot 10^7$	$7.9 \cdot 10^7$
η	-	84.85	17.54	1.41	6.40	13.45

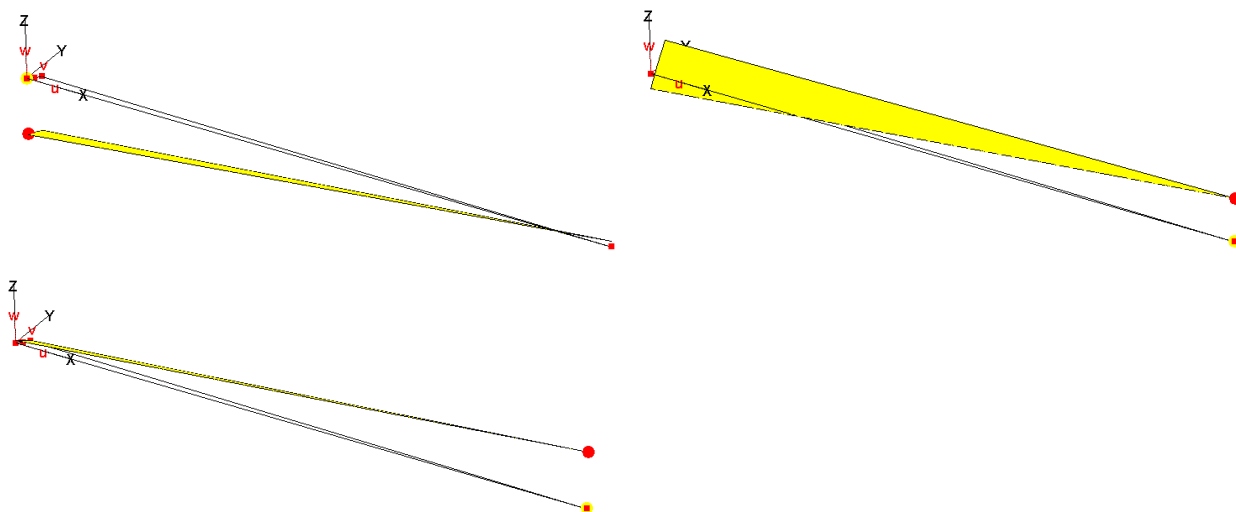


Рисунок 3.1.2.3.а

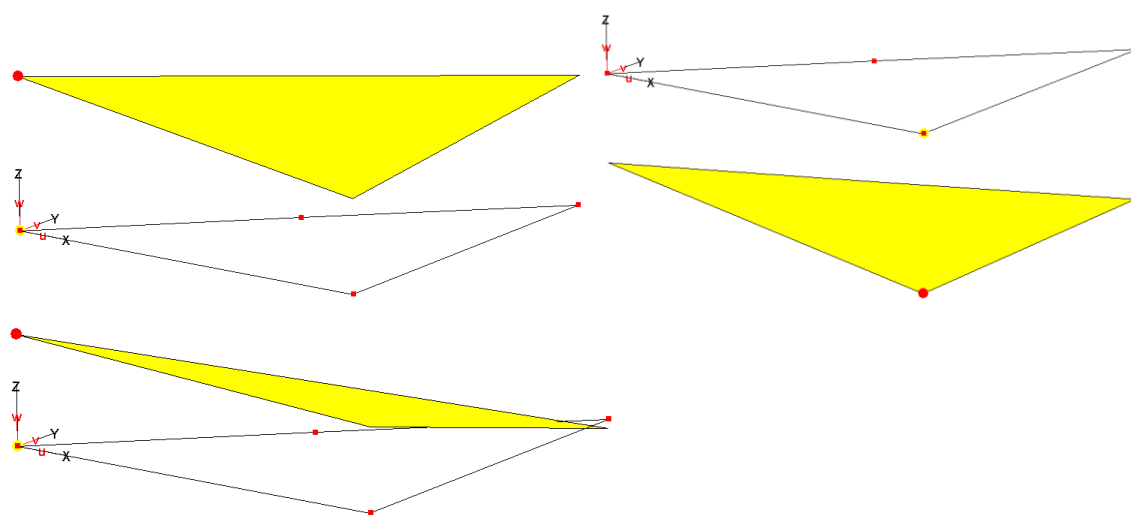


Рисунок 3.1.2.3.б

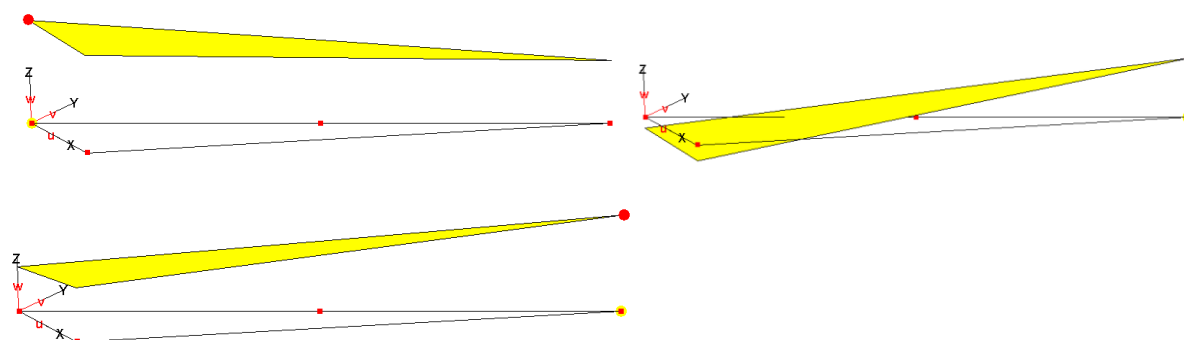


Рисунок 3.1.2.3.в

- невыпуклый четырехугольный КЭ:

Сравнение численных результатов с аналитическим для невыпуклого КЭ в зависимости от угла β представлено в таблице 3.1.2.4. На рис. 3.1.2.4 приведены собственные вектора матрицы жесткости соответствующие λ_1 , λ_2 и λ_3 для $\beta=233^\circ$.

Таблица 3.1.2.4

	Теория	MicroFe, β градусы		
		233	254	262
λ_1	0	0	0	$2.4 \cdot 10^{-10}$
λ_2	0	0	0	$3.5 \cdot 10^{-10}$
λ_3	0	0	0	$3.8 \cdot 10^{-10}$
$\ K\ $	-	$1.3 \cdot 10^7$	$2.7 \cdot 10^7$	$5.5 \cdot 10^7$
η	-	1.26	1.13	1.06

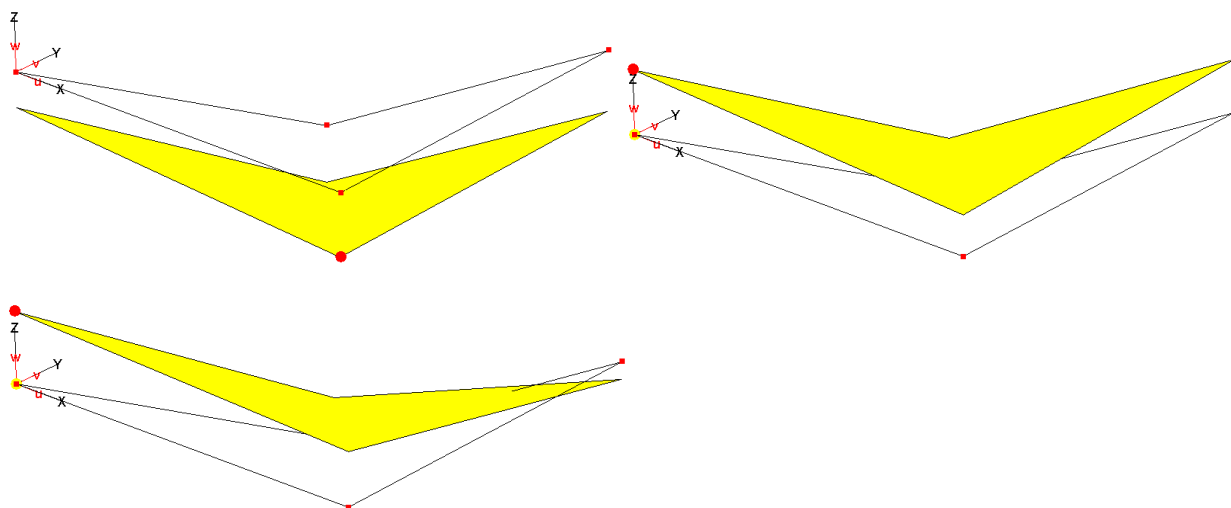


Рисунок 3.1.2.4

3.1.3 Проверка точного представления жестких смещений объемного конечного элемента теории упругости

1. Название задачи. Спектральные свойства матрицы жесткости (МЖ) объемного конечного элемента (КЭ).

2. Формулировка задачи. Рассматриваются КЭ в виде пирамид с треугольным и четырехугольным основаниями, а также КЭ в виде призм с треугольным и четырехугольным основаниями. Определяются собственные значения и собственные вектора матрицы жесткости КЭ.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^{10}$ Па - модуль упругости,

$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона,

$h = 0.2$ м - толщина КЭ;

$l = 0.5$ м - длины ребер основания и высоты КЭ.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается один КЭ без краевых условий.

5. Подобласть верификации. Проверка сходимости: спектральные свойства конечного элемента (КЭ) теории упругости. Проверялось включают ли функции формы конечного элемента моды перемещений конечного элемента как жесткого целого.

6. Аналитическое решение. Если функции формы конечного элемента содержат моды перемещений конечного элемента как жесткого целого, то шесть первых собственных значений матрицы жесткости равняются нулю, а соответствующие им собственные вектора представляют независимые жесткие смещения элемента:

$$(K - \lambda E)u = 0,$$

Здесь K – матрица жесткости КЭ, λ – собственные значения МЖ, E – единичная матрица, u – собственный вектор МЖ.

7. Численное решение по MicroFe.

Сравнение численных результатов с аналитическим для различных КЭ представлено в таблице 3.1.3.1. Через $\|K\|$ обозначена норма матрицы жесткости КЭ.

Таблица 3.1.3.1

	Теория	MicroFe			
		Пирамида, треугольное основание	Пирамида, четырёхугольное основание	Призма, треугольное основание	Призма, четырёхугольное основание
λ_1	0	0	0	0	0
λ_2	0	0	0	$7.9 \cdot 10^{-11}$	$5.0 \cdot 10^{-11}$
λ_3	0	$1.7 \cdot 10^{-11}$	0	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$1.8 \cdot 10^{-10}$
λ_4	0	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$2.8 \cdot 10^{-11}$	$3.4 \cdot 10^{-10}$	$3.9 \cdot 10^{-10}$
λ_5	0	$3.9 \cdot 10^{-10}$	$7.5 \cdot 10^{-11}$	$6.0 \cdot 10^{-10}$	$4.5 \cdot 10^{-10}$
λ_6	0	$6.7 \cdot 10^{-10}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$	$9.4 \cdot 10^{-10}$	$5.6 \cdot 10^{-10}$
$\ K\ $	-	$9.4 \cdot 10^6$	$1.7 \cdot 10^7$	$1.4 \cdot 10^7$	$1.5 \cdot 10^7$

3.1.4 Проверка точного представления состояний постоянных деформаций конечного элемента плоской оболочки

1. Название задачи. Анализ представления состояний постоянных деформаций конечного элемента плоской оболочки. Patch-тест с постоянными деформациями. Источник [MacNeal R., Harder R. A proposed standart set of problems to test finite element accuracy. Finite Element Anal. Des., 1987, 1, P.1793-1799.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается прямоугольная пластинка с заданными смещениями кромок, соответствующими постоянным деформациям. Определяются напряжения (усилия) в узлах пластинки.

3. Исходные данные.

$E = 1.0 \cdot 10^6$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.25$	- коэффициент Пуассона,
$h = 0.1$ м	- толщина пластинки;
$l_1 = 0.24$ м	- длина пластинки;
$l_2 = 0.12$ м	- ширина пластинки.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается три расчетных схемы состоящих из 8 узлов. Первая расчетная схема состоит из 5-ти четырехугольных конечных элементов плоской оболочки (рис.3.1.4.1а). Вторая расчетная схема состоит из 10-ти треугольных конечных элементов плоской оболочки (рис.3.1.4.1б). Третья расчетная схема состоит из 3-х четырехугольных конечных элементов и 4-х треугольных конечных элементов плоской оболочки (рис.3.1.4.1в). На рис.3.1.4.1а показаны координаты всех узлов, а на рис.3.1.4.1б – номера узлов.

Краевые условия для всех схем следующие:

$$\text{Узел 1} - u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0, \varphi_z = 0$$

$$\text{Узлы 2, 3, 4} - u_x = 0, u_y = 0, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0, \varphi_z = 0.$$

Шесть кинематических нагружений:

$$\text{Нагружение 1: } u_x^{(2)} = u_x^{(3)} = 0.00024\text{м} - \text{растяжение по оси OX};$$

$$\text{Нагружение 2: } u_y^{(3)} = u_y^{(4)} = 0.00012\text{м} - \text{растяжение по оси OY};$$

$$\text{Нагружение 3: } u_x^{(3)} = u_x^{(4)} = 0.00012\text{м}, u_y^{(2)} = u_y^{(3)} = 0.00024\text{м} - \text{чистый сдвиг в}$$

плоскости XOY;

Нагружение 4: $\varphi_y^{(2)} = \varphi_y^{(3)} = 0.024 \text{ рад}$ - цилиндрический изгиб относительно оси OY;

Нагружение 5: $\varphi_x^{(3)} = \varphi_x^{(4)} = 0.012 \text{ рад}$ - цилиндрический изгиб относительно оси OX;

Нагружение 6: $\varphi_x^{(2)} = \varphi_x^{(3)} = 0.024 \text{ рад}$, $\varphi_y^{(3)} = \varphi_y^{(4)} = -0.012 \text{ рад}$ - чистое кручение.

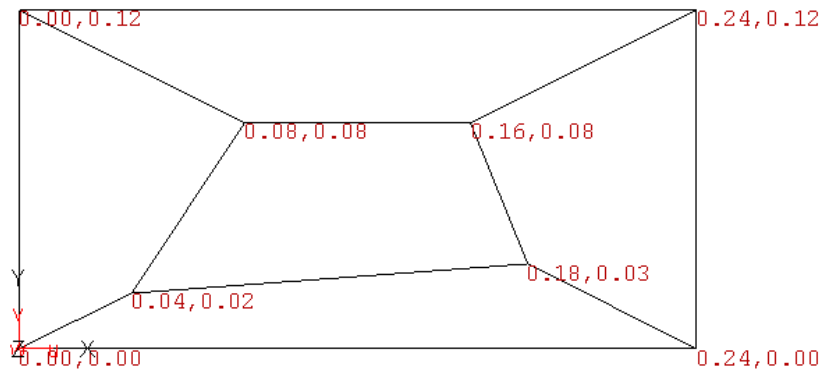


Рис.3.1.4.1а

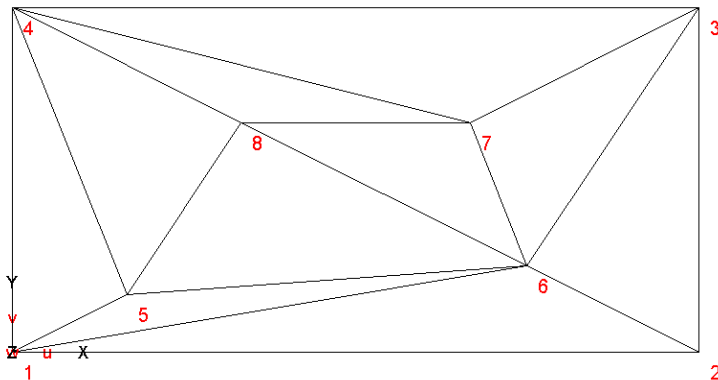


Рис.3.1.4.1б

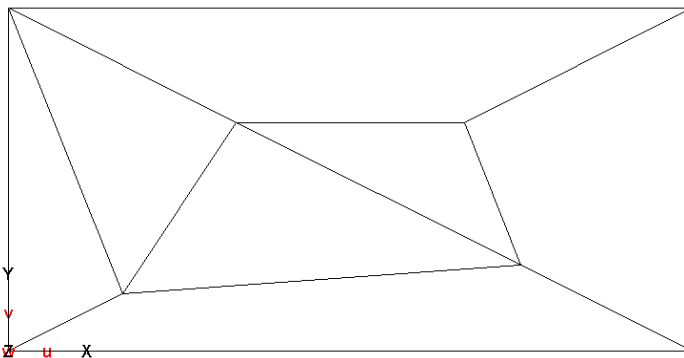


Рис.3.1.4.1в

5. Подобласть верификации. Проверка сходимости конечного элемента (КЭ) плоской оболочки. Проверка включает ли функции формы конечного элемента моды перемещений конечного элемента соответствующие состояниям постоянных деформаций.

6. Аналитическое решение. Если функции формы конечного элемента содержат моды перемещений конечного элемента соответствующие состояниям постоянных деформаций, то получим точное решение для напряжений.

Нагружение 1:

$$\varepsilon_x = 1.0 * 10^{-3}, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0, \sigma_y = \nu * \sigma_x, \tau_{xy} = (\gamma_{xy} * E) / (2(1 + \nu)) = 0,$$

$$\sigma_x = (\varepsilon_x * E) / (1 - \nu^2) = 106666(6), \sigma_y = \nu * \sigma_x = 26666(6),$$

$$m_x = 0, m_y = 0, m_{xy} = 0$$

Нагружение 2:

Индексы x и y меняются местами и соответственно имеем:

$$\sigma_x = 26666(6), \sigma_y = 106666(6), \tau_{xy} = 0,$$

$$m_x = 0, m_y = 0, m_{xy} = 0$$

Нагружение 3:

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 2.0 * 10^{-3}, \sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = (\gamma_{xy} * E) / (2(1 + \nu)) = 800,$$

$$m_x = 0, m_y = 0, m_{xy} = 0$$

Нагружение 4:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0,$$

$$m_x = -0,155140 \quad m_y = -0,038785 \quad m_{xy} = 0$$

Нагружение 5:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0,$$

$$m_x = 0,038785, m_y = 0,155140 \quad m_{xy} = 0$$

Нагружение 6:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0,$$

$$m_x = 0, m_y = 0, m_{xy} = 0.116355$$

7. Численное решение по MicroFe.

- Первая расчетная схема из 5-ти четырехугольных конечных элементов плоской оболочки:

Нагружение 1. $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для σ_x , σ_y приведены на рис. 3.1.4.2а и рис. 3.1.4.2б

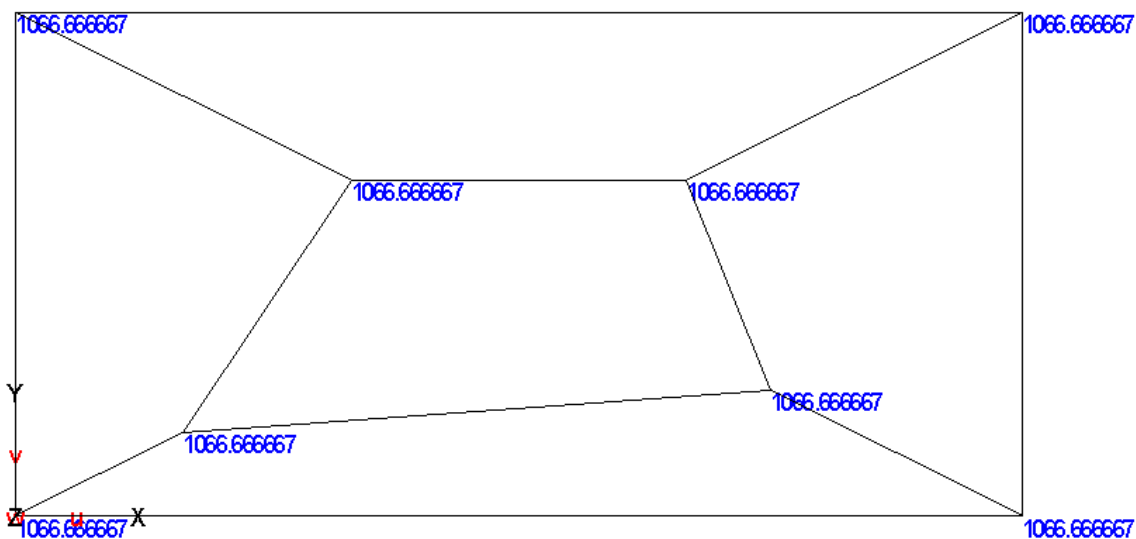


Рис. 3.1.4.2а (σ_x)

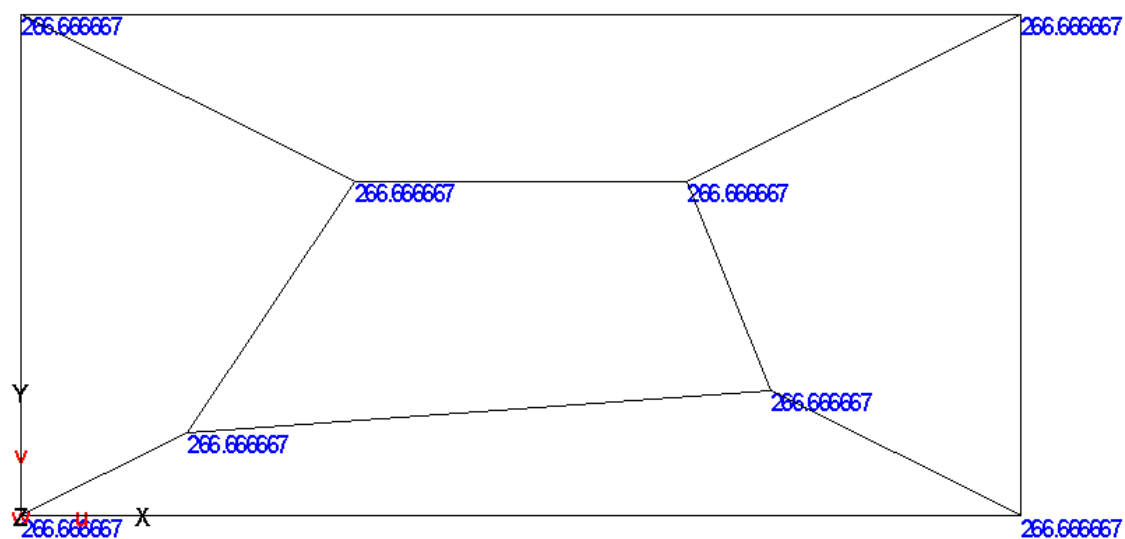


Рис. 3.1.4.2б (σ_y)

Нагружение 2. $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для σ_x , σ_y приведены на рис. 3.1.4.3а и рис. 3.1.4.3б

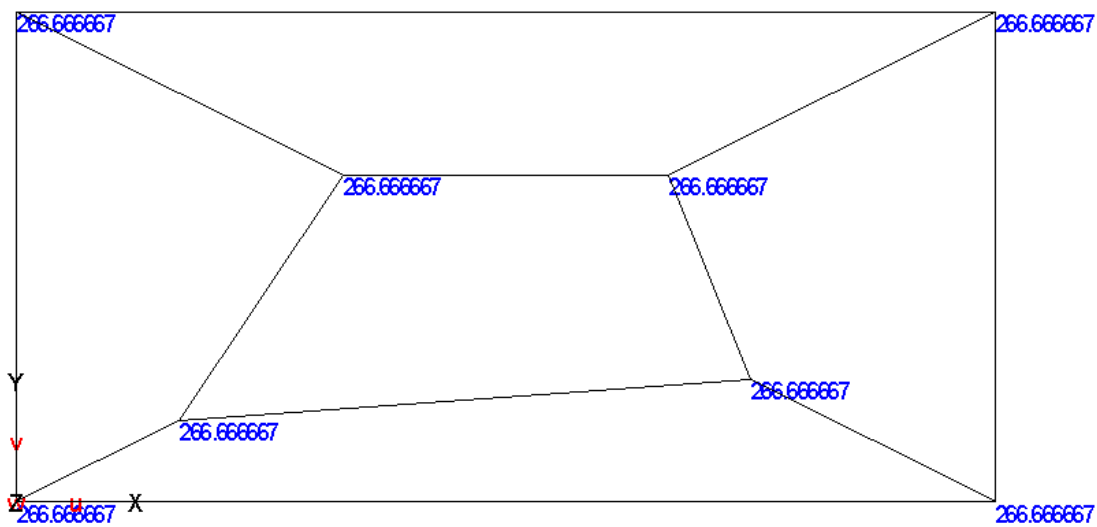


Рис. 3.1.4.3а (σ_x)

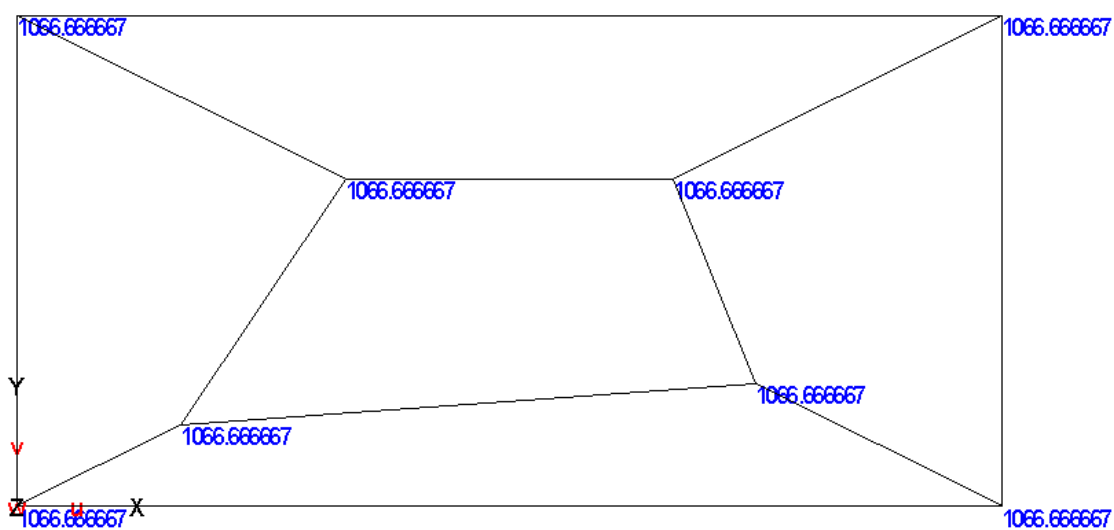


Рис. 3.1.4.3б (σ_y)

Нагружение 3. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для τ_{xy} приведены на рис. 3.1.4.4

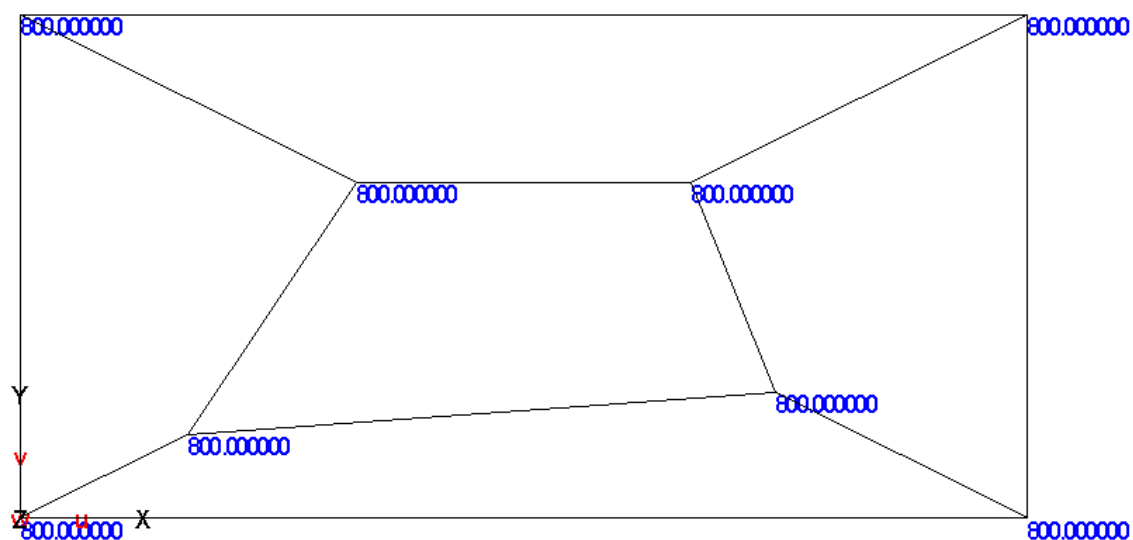


Рис. 3.1.4.4 (τ_{xy})

Нагружение 4. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для $m_x = 0$, $m_y = 0$ приведены на рис. 3.1.4.5а и рис. 3.1.4.5б

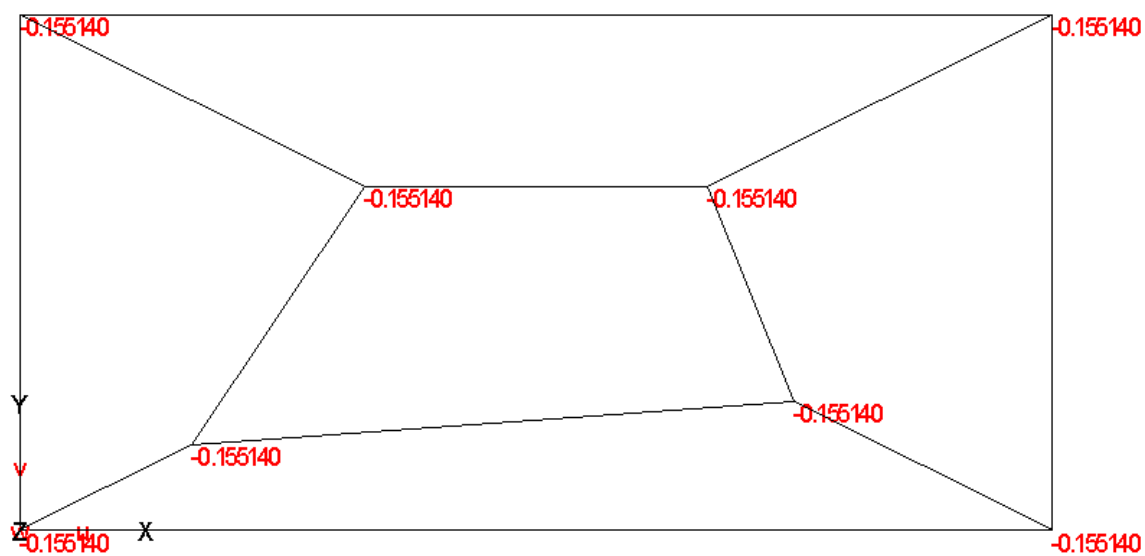
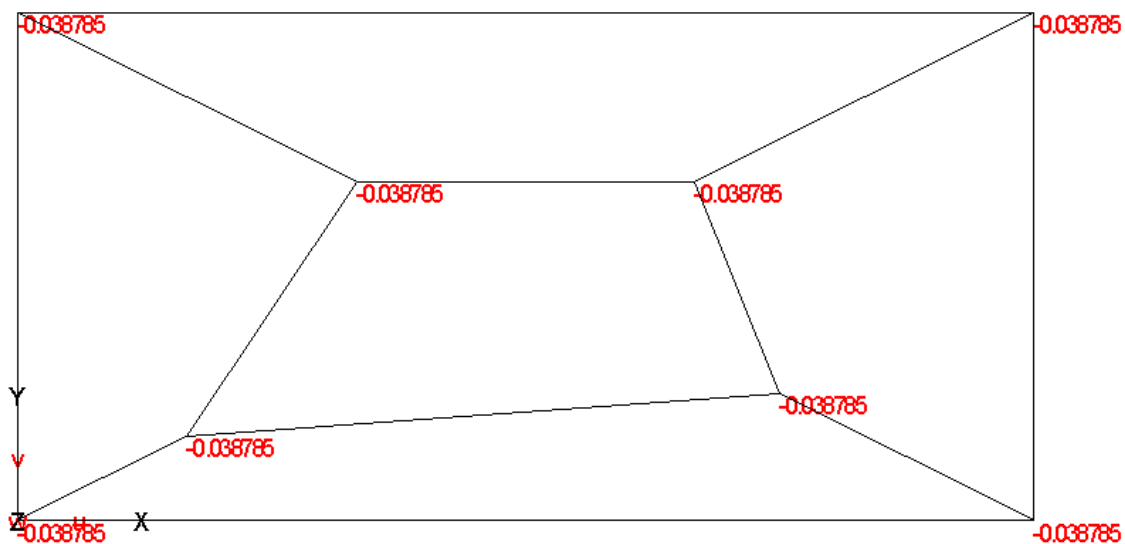
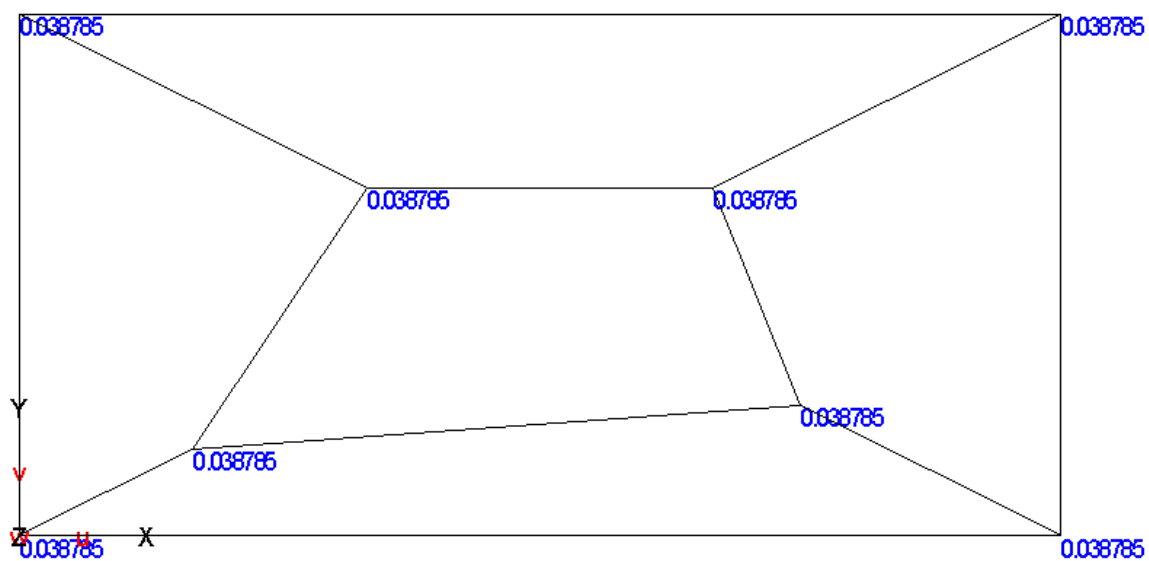


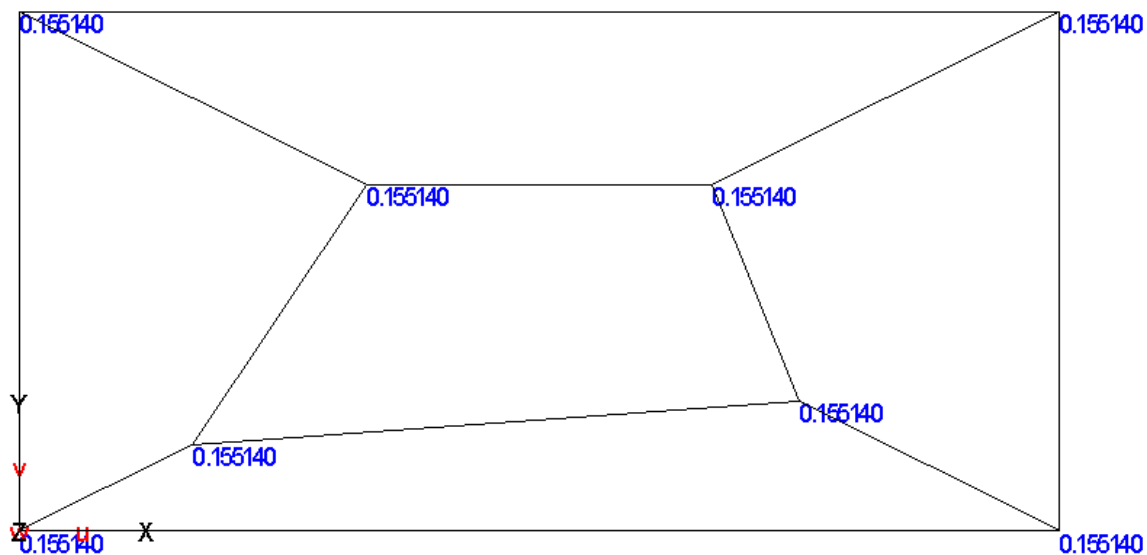
Рис. 3.1.4.5а (m_x)

Рис. 3.1.4.5б (m_y)

Нагружение 5. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_{xy} = 0$

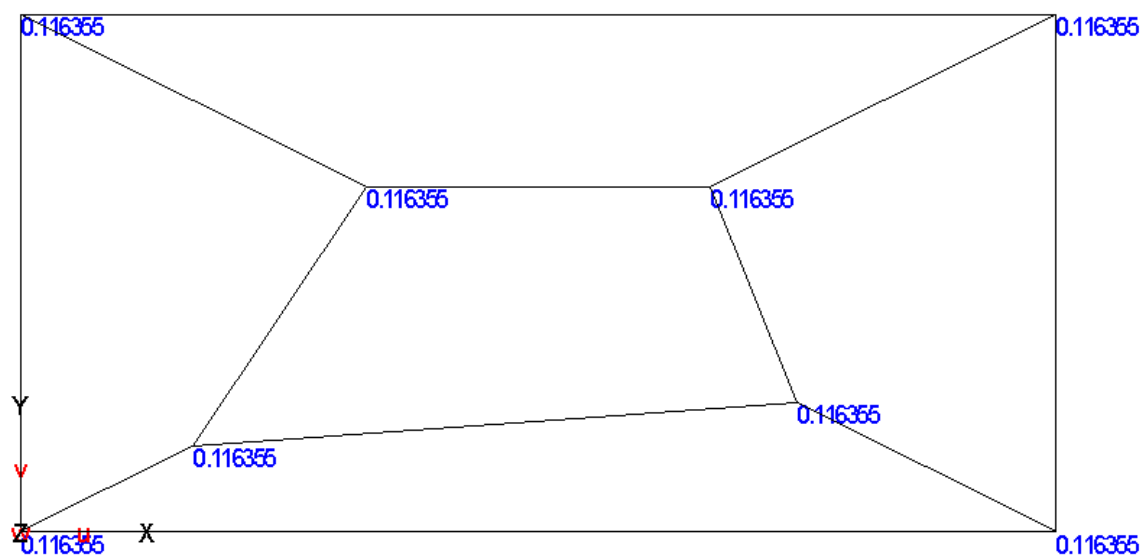
Результаты для $m_x = 0$, $m_y = 0$ приведены на рис. 3.1.4.6а и рис. 3.1.4.6б

Рис. 3.1.4.6а (m_x)

Рис. 3.1.4.6б (m_y)

Нагружение 6. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для m_{xy} приведены на рис. 3.1.4.7

Рис. 3.1.4.7 (m_{xy})

- Вторая расчетная схема из 10-ти треугольных конечных элементов плоской оболочки:

Нагружение 1. $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для σ_x , σ_y приведены на рис. 3.1.4.8а и рис. 3.1.4.8б

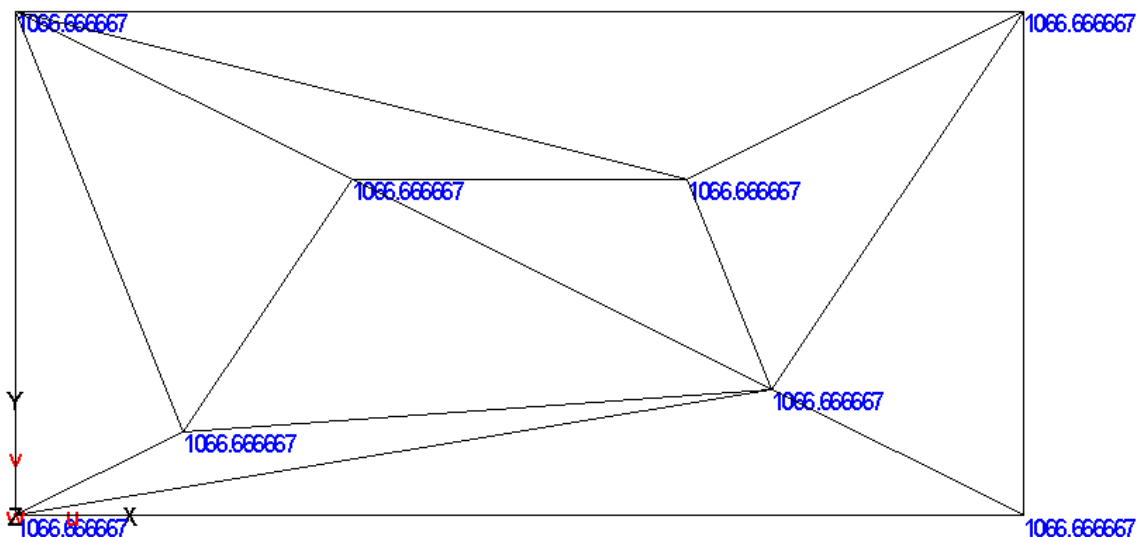


Рис. 3.1.4.8а (σ_x)

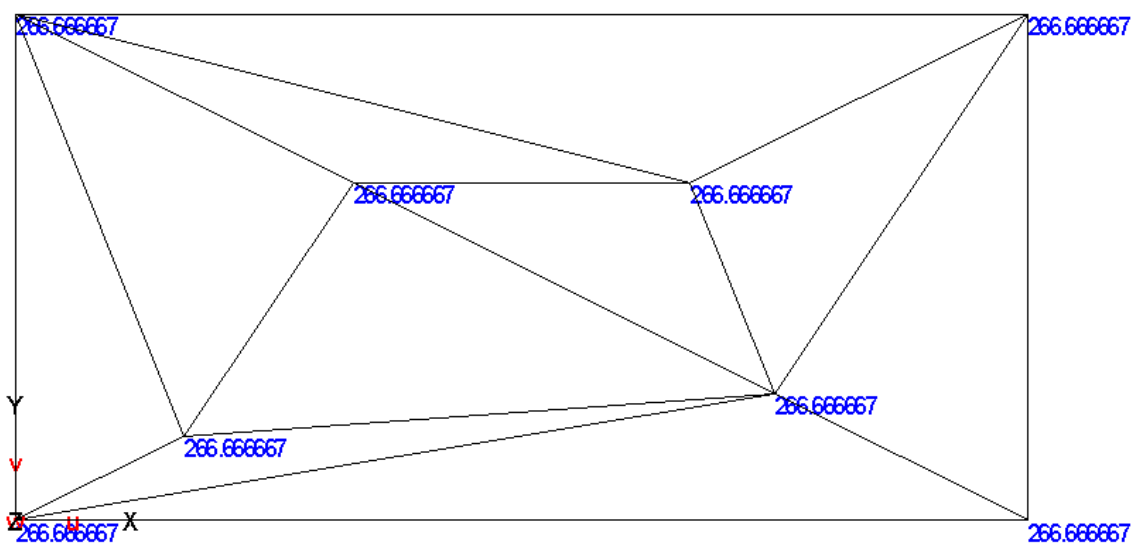


Рис. 3.1.4.8б (σ_y)

Нагружение 2. $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для σ_x , σ_y приведены на рис. 3.1.4.9а и рис. 3.1.4.9б

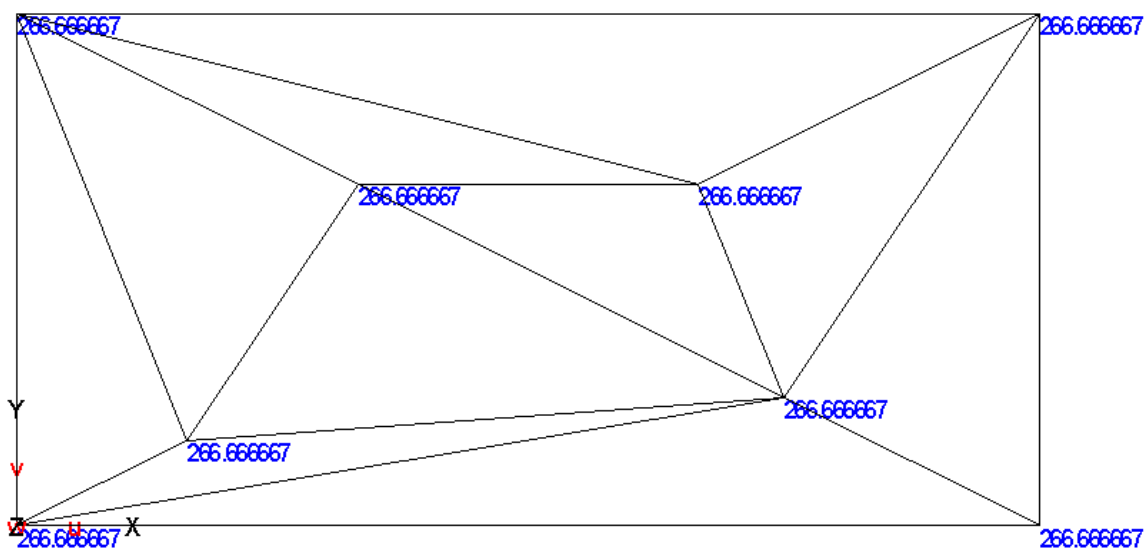


Рис. 3.1.4.9а (σ_x)

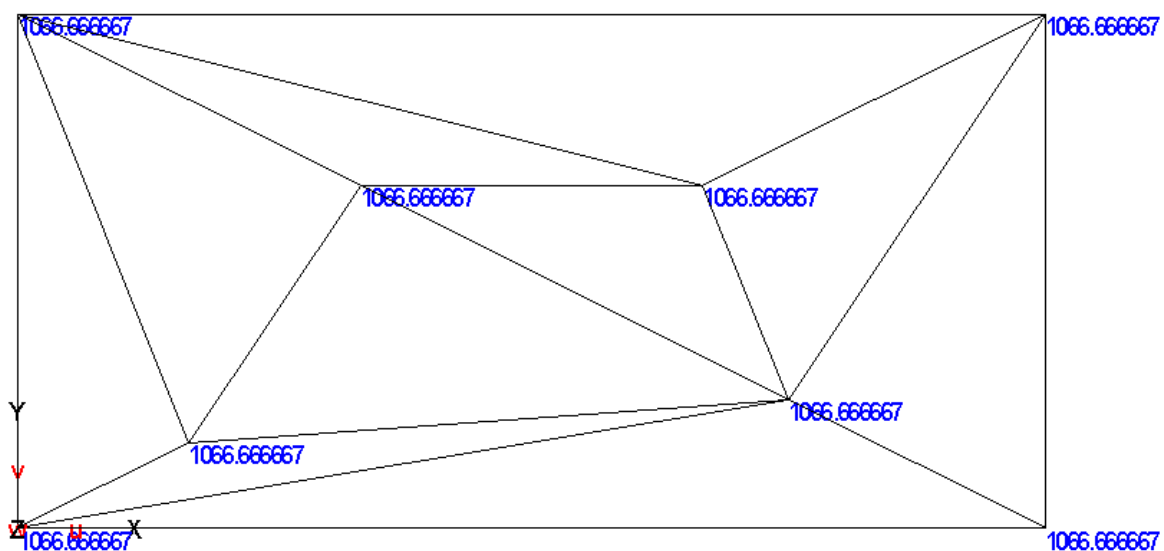


Рис. 3.1.4.9б (σ_y)

Нагружение 3. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для τ_{xy} приведены на рис. 3.1.4.10

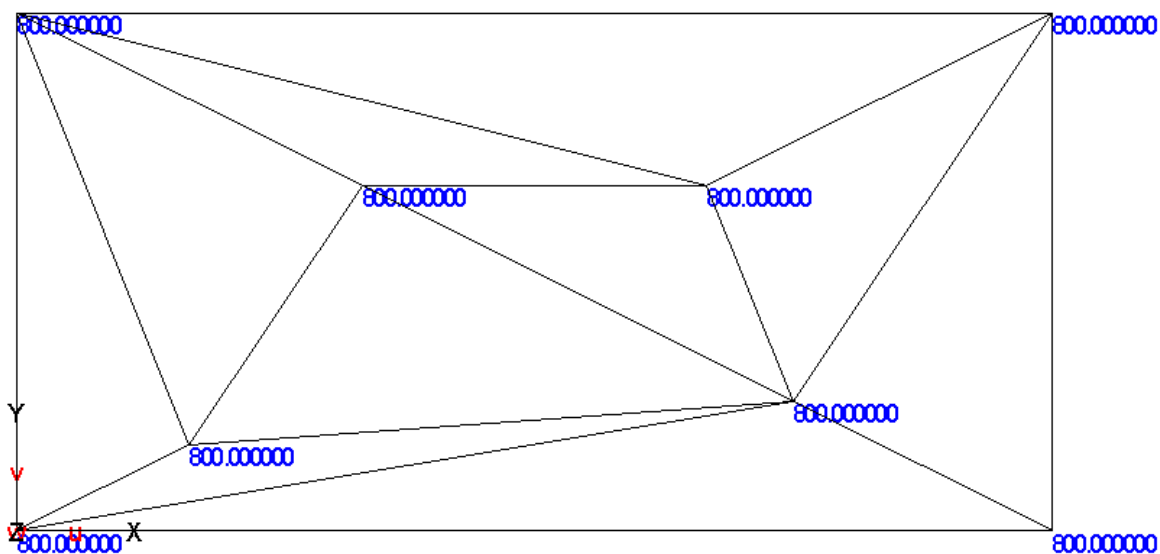


Рис. 3.1.4.10 (τ_{xy})

Нагружение 4. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для $m_x = 0$, $m_y = 0$ приведены на рис. 3.1.4.11a и рис. 3.1.4.11б

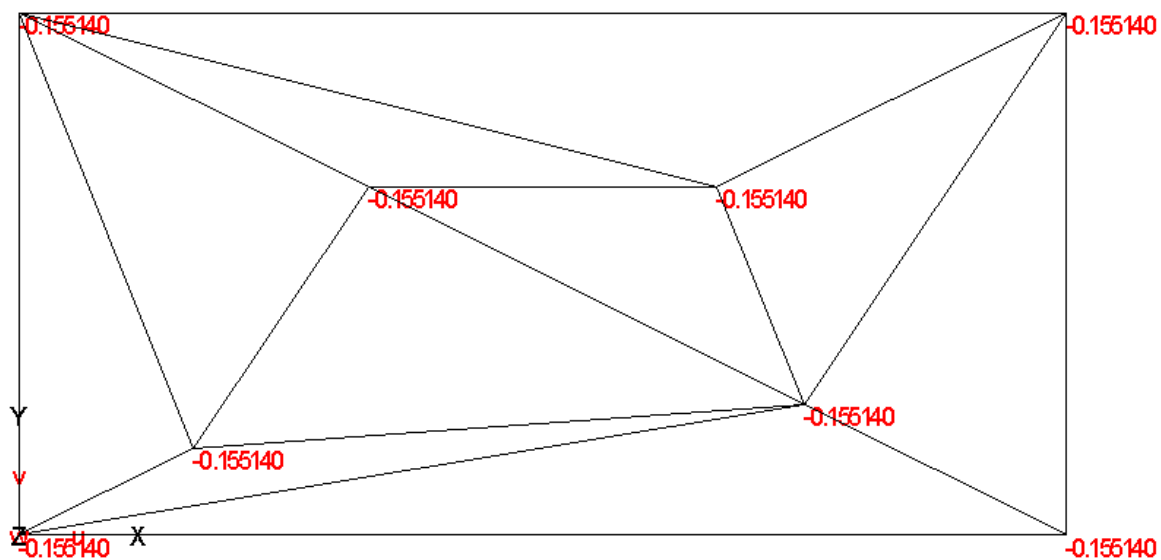
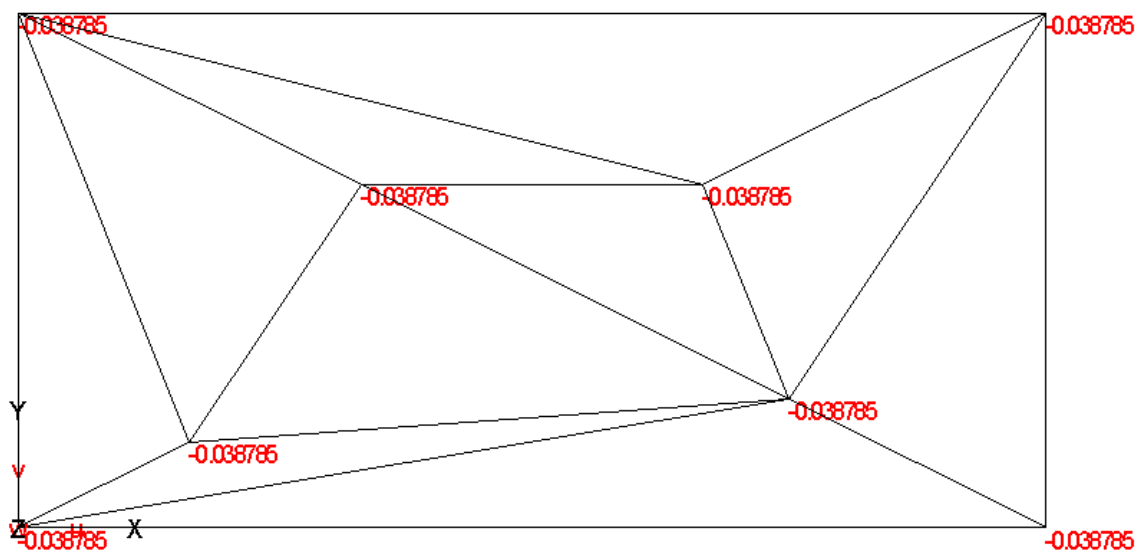
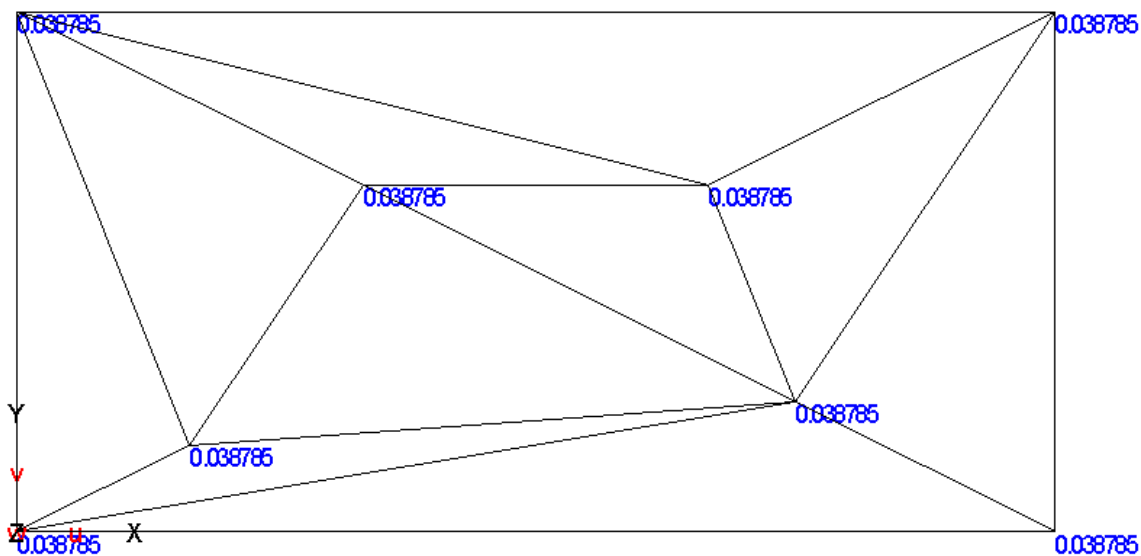


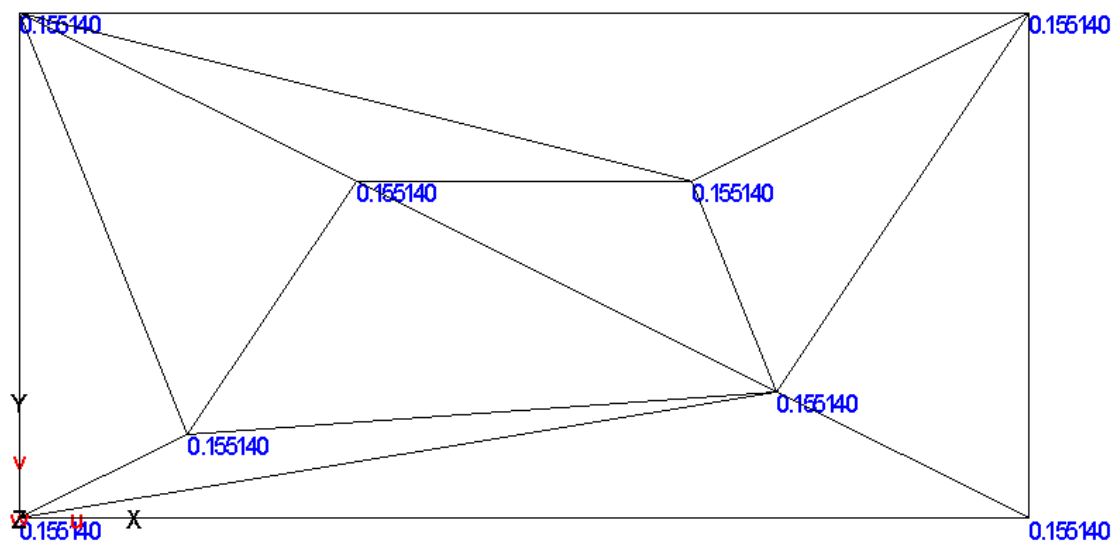
Рис. 3.1.4.11a (m_x)

Рис. 3.1.4.11б (m_y)

Нагружение 5. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_{xy} = 0$

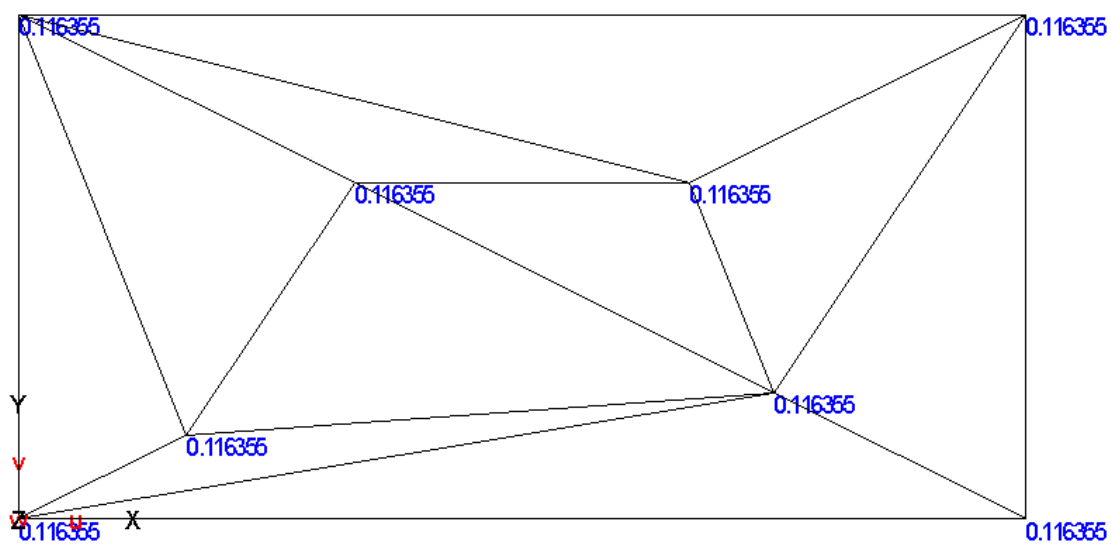
Результаты для $m_x = 0$, $m_y = 0$ приведены на рис. 3.1.4.12а и рис. 3.1.4.12б

Рис. 3.1.4.12а (m_x)

Рис. 3.1.4.126 (m_y)

Нагружение 6. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для m_{xy} приведены на рис. 3.1.4.13

Рис. 3.1.4.13 (m_{xy})

- Третья расчетная схема из 3-х четырехугольных конечных элементов и 4-х треугольных конечных элементов плоской оболочки:

Нагружение 1. $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для σ_x , σ_y приведены на рис. 3.1.4.14а и рис. 3.1.4.14б

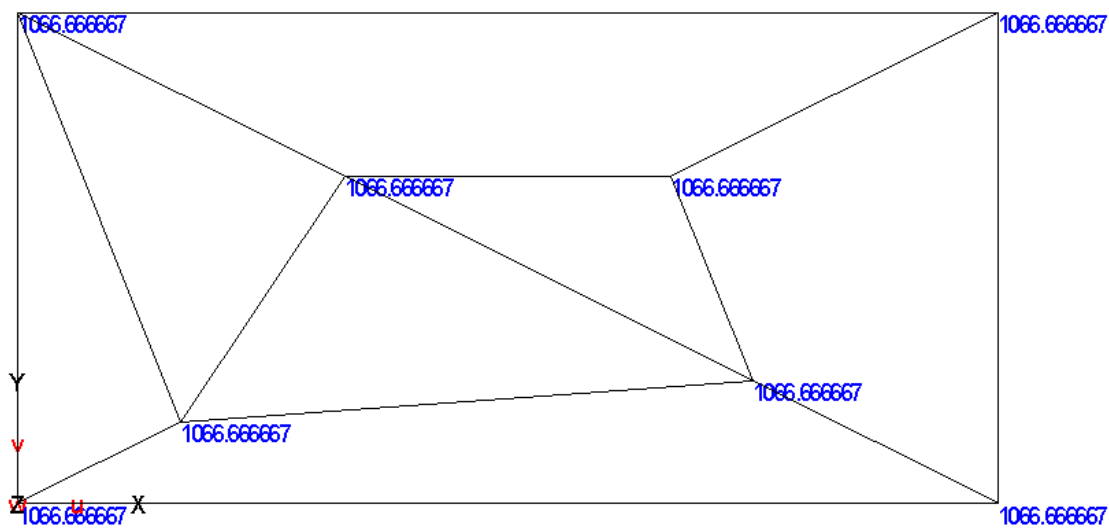


Рис. 3.1.4.14а (σ_x)

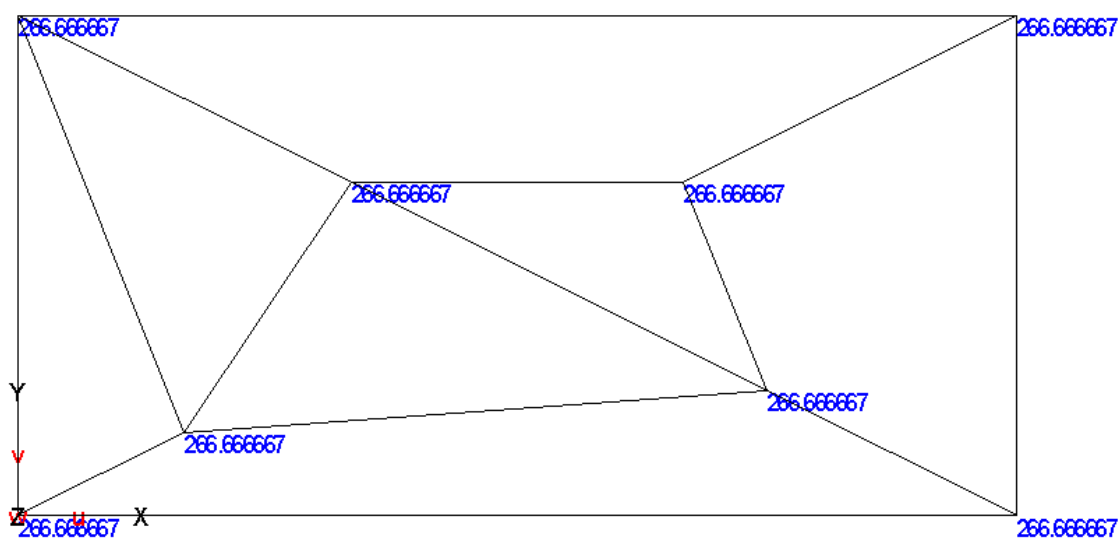


Рис. 3.1.4.14б (σ_y)

Нагружение 2. $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для σ_x , σ_y приведены на рис. 3.1.4.15а и рис. 3.1.4.15б

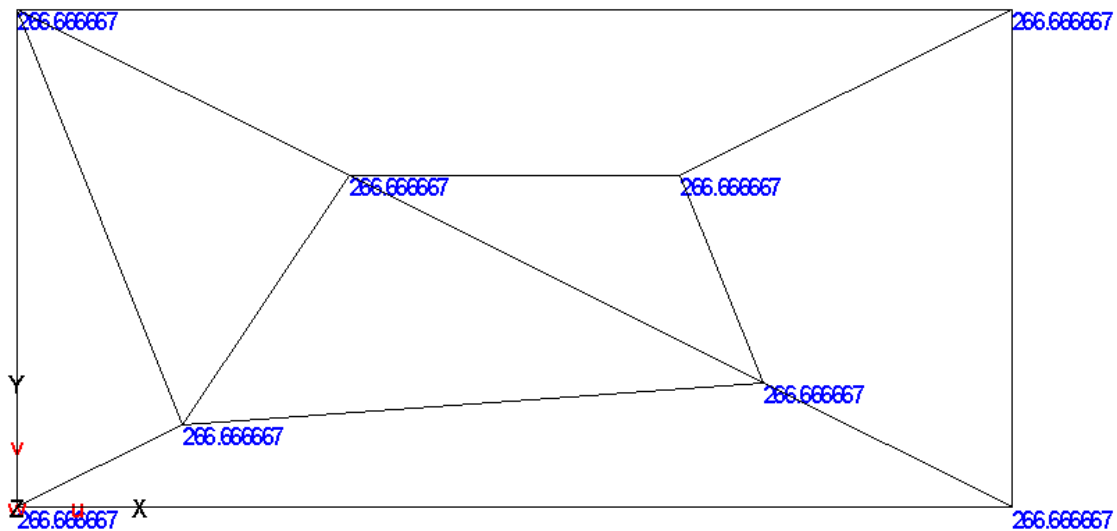


Рис. 3.1.4.15а (σ_x)

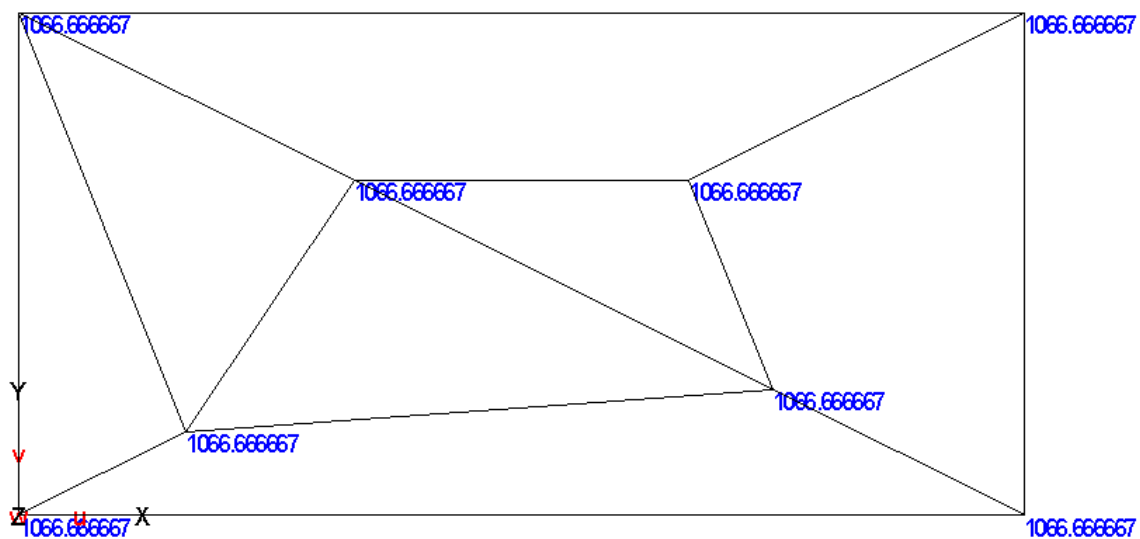


Рис. 3.1.4.15б (σ_y)

Нагружение 3. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для τ_{xy} приведены на рис. 3.1.4.16

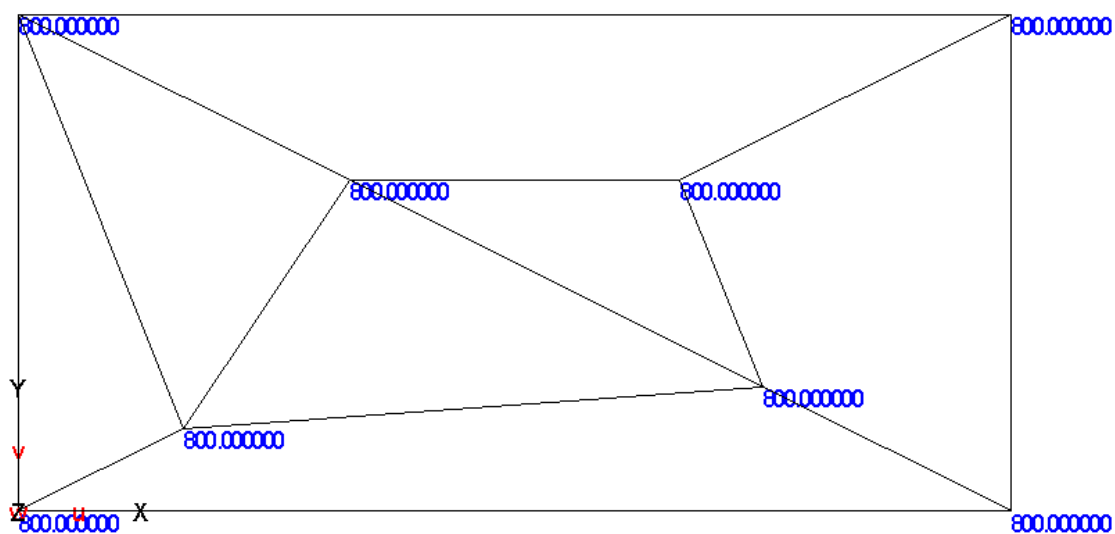


Рис. 3.1.4.16 (τ_{xy})

Нагружение 4. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для $m_x = 0$, $m_y = 0$ приведены на рис. 3.1.4.17a и рис. 3.1.4.17б

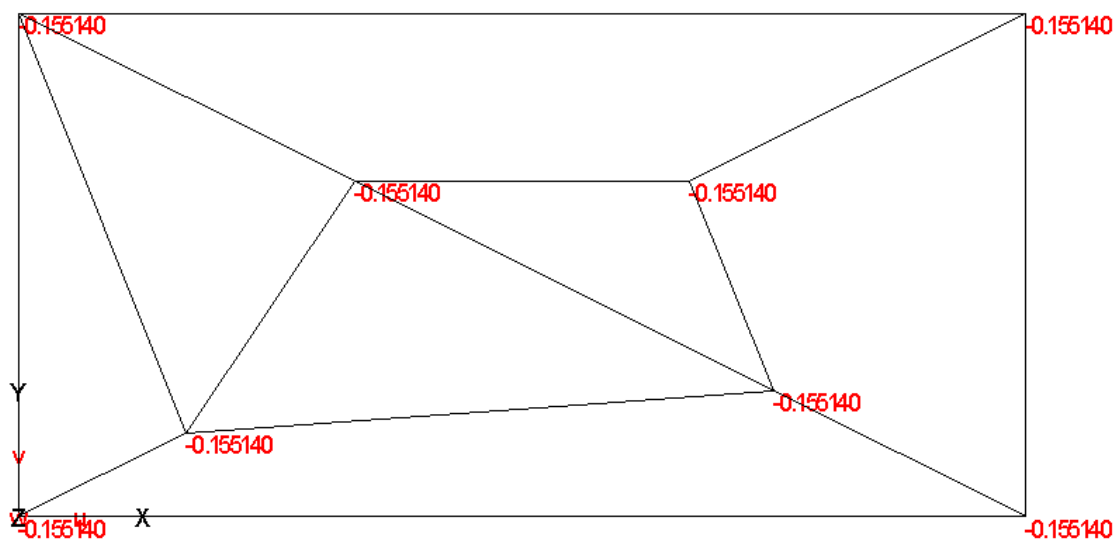
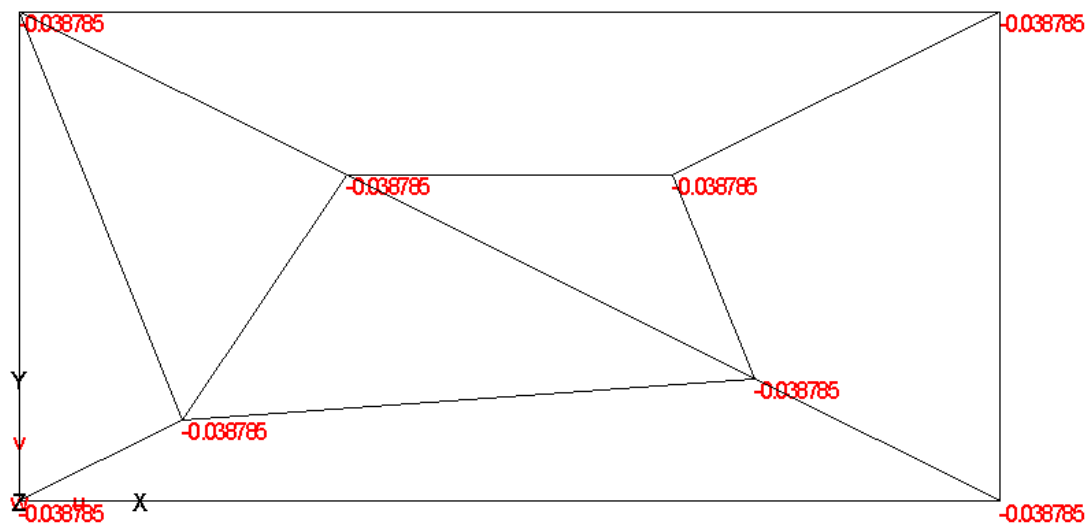
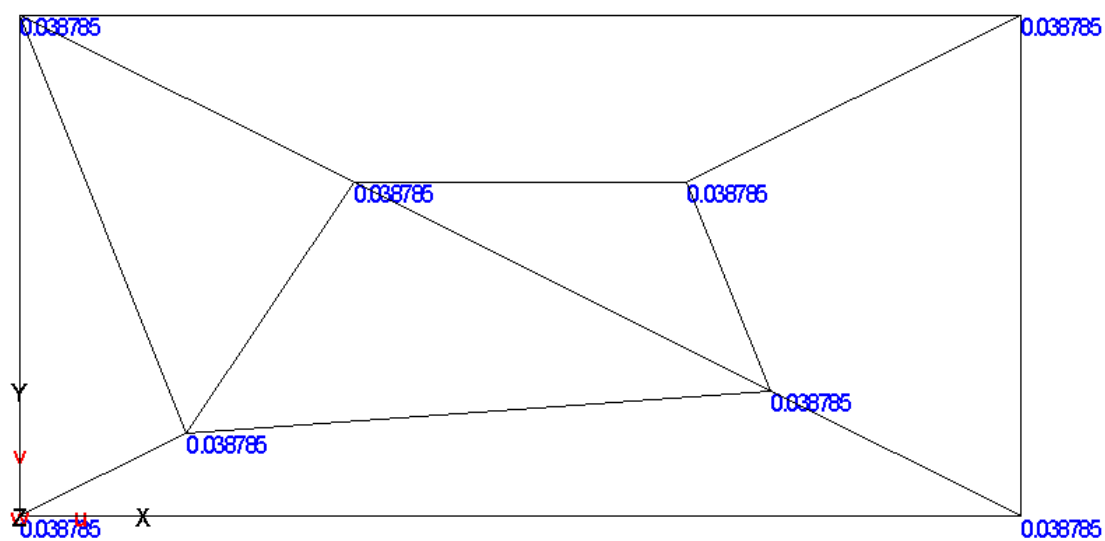


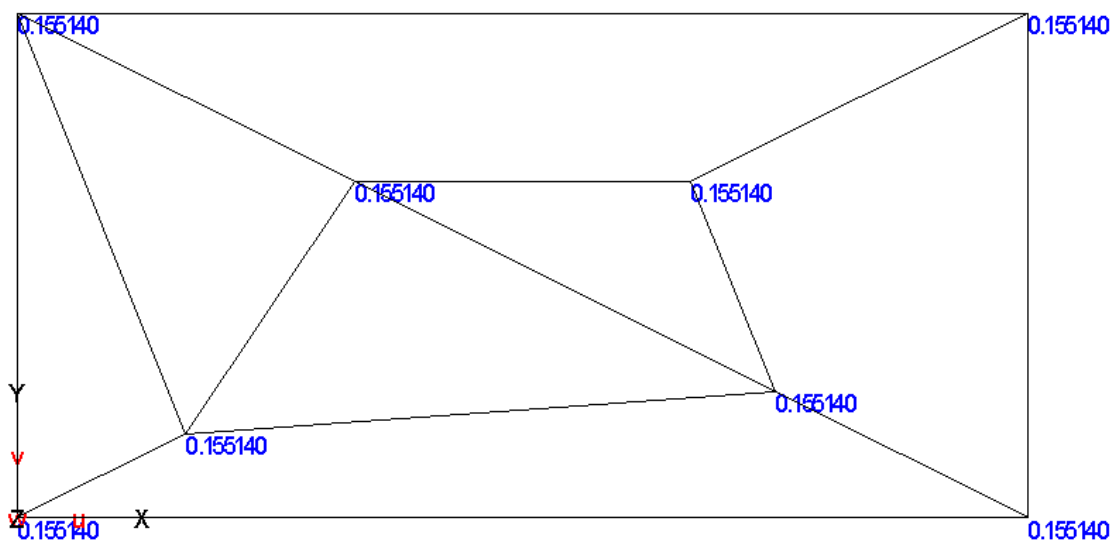
Рис. 3.1.4.17a (m_x)

Рис. 3.1.4.176 (m_y)

Нагружение 5. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_{xy} = 0$

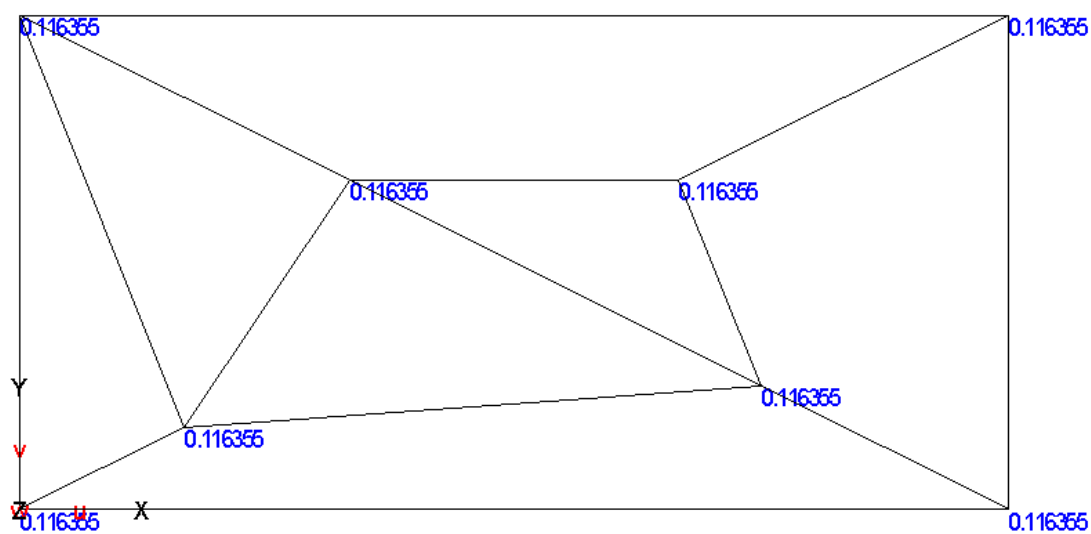
Результаты для $m_x = 0$, $m_y = 0$ приведены на рис. 3.1.4.18а и рис. 3.1.4.18б

Рис. 3.1.4.18а (m_x)

Рис. 3.1.4.186 (m_y)

Нагружение 6. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_{xy} = 0$

Результаты для m_{xy} приведены на рис. 3.1.4.19

Рис. 3.1.4.19 (m_{xy})

3.1.5 Проверка точного представления состояний постоянных деформаций объемного конечного элемента теории упругости

1. Название задачи. Анализ представления состояний постоянных деформаций конечного элемента теории упругости (объемный КЭ). Patch-тест с постоянными деформациями. Источник [MacNeal R., Harder R. A proposed standart set of problems to test finite element accuracy. Finite Element Anal. Des., 1987, 1, P.1793-1799.]

2. Формулировка задачи. Рассматривается куб с ребрами длиной 3 с заданными смещениями граней, соответствующими постоянным деформациям. Определяются напряжения в узлах призмы.

3. Исходные данные.

$E = 1500$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.25$	- коэффициент Пуассона,
$h = 3$ м	- высота куба;
$l_1 = 3$ м	- длина куба;
$l_2 = 3$ м	- ширина куба.

4. Конечноеэлементная модель. Рассматривается расчетная схема состоящая из 16 узлов и 7-ти призматических объемных конечных элементов (рис.3.1.5.1а). На рис.3.1.5.1а показаны координаты всех узлов, а на рис.3.1.5.1б – номера узлов.

Краевые условия следующие:

Узлы 1- 4, 9 - 12 - $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$

Шесть кинематических нагружений:

Нагружение 1: $u_x^{(2)} = u_x^{(3)} = u_x^{(10)} = u_x^{(11)} = 0.003m$ - растяжение по оси OX;

Нагружение 2: $u_y^{(3)} = u_y^{(4)} = u_y^{(11)} = u_y^{(12)} = 0.003m$ - растяжение по оси OY;

Нагружение 3: $u_z^{(9)} = u_z^{(10)} = u_z^{(11)} = u_z^{(12)} = 0.003m$ - растяжение по оси OZ;

Нагружение 4: $u_x^{(3)} = u_x^{(4)} = u_x^{(11)} = u_x^{(12)} = 0.003m$ - чистый сдвиг по оси OX;

Нагружение 5: $u_y^{(9)} = u_y^{(10)} = u_y^{(11)} = u_y^{(12)} = 0.003m$ - чистый сдвиг по оси OY;

Нагружение 6: $u_z^{(2)} = u_z^{(3)} = u_z^{(10)} = u_z^{(11)} = 0.003m$ - чистый сдвиг по оси OZ.

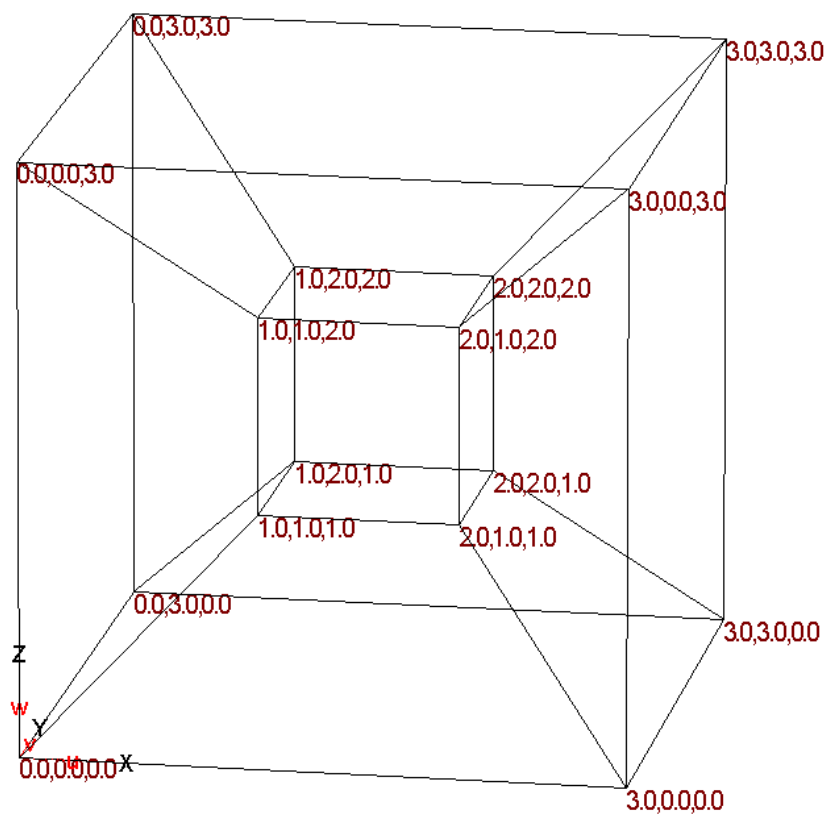


Рис.3.1.5.1a

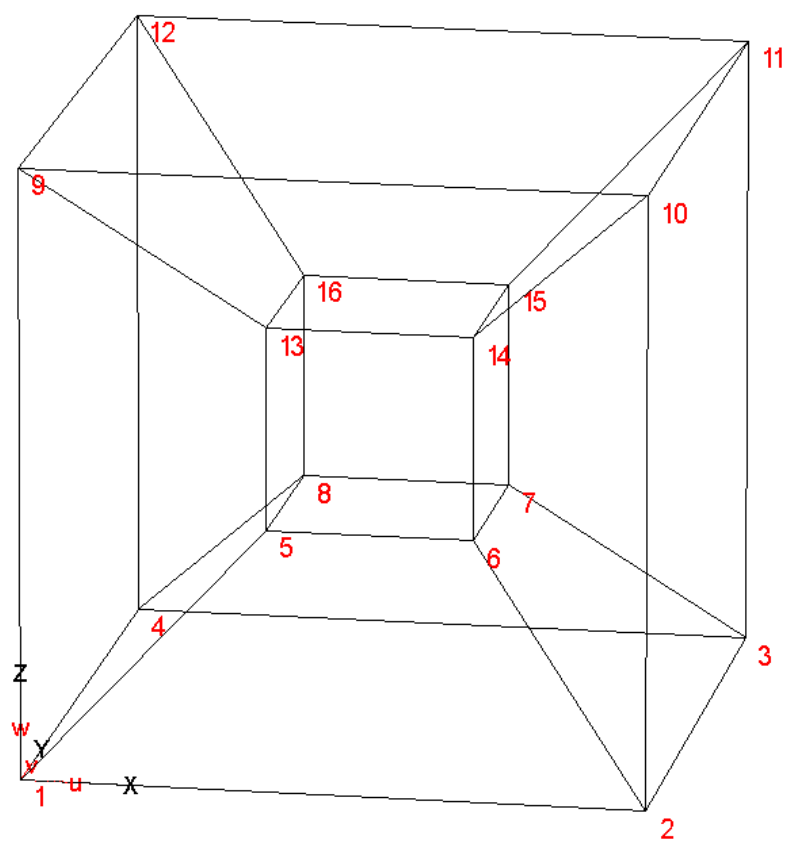


Рис.3.1.5.1б

5. Подобласть верификации. Проверка сходимости объемного конечного элемента.

Проверялось включают ли функции формы конечного элемента моды перемещений конечного элемента соответствующие состояниям постоянных деформаций.

6. Аналитическое решение. Если функции формы конечного элемента содержат моды перемещений конечного элемента соответствующие состояниям постоянных деформаций, то получим точное решение для напряжений.

Нагружение 1:

$$\varepsilon_x = 1.0 * 10^{-3}, \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \sigma_y = \sigma_z = \nu * \sigma_x / (1 - \nu),$$

$$\sigma_x = (\varepsilon_x * E) / ((1 - 2\nu^2) / (1 - \nu)) = 1.8, \sigma_y = \sigma_z = 0.6,$$

$$\sigma_{xy} = (\gamma_{xy} * E) / (2(1 + \nu)) = 0, \sigma_{xz} = (\gamma_{xz} * E) / (2(1 + \nu)) = 0,$$

$$\sigma_{yz} = (\gamma_{yz} * E) / (2(1 + \nu)) = 0$$

Нагружение 2:

$$\sigma_x = 0.6, \sigma_y = 1.8, \sigma_z = 0.6, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$$

Нагружение 3:

$$\sigma_x = 0.6, \sigma_y = 0.6, \sigma_z = 1.8, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$$

Нагружение 4:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \gamma_{xy} = 1.0 * 10^{-3}, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0,$$

$$\sigma_{xy} = (\gamma_{xy} * E) / (2(1 + \nu)) = 0.6, \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

Нагружение 5:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0.6$$

Нагружение 6:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0.6, \sigma_{yz} = 0$$

7. Численное решение по MicroFe.

Нагружение 1. $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$

Результаты для σ_x приведены на рис. 3.1.5.2а, а для σ_y , σ_z рис. 3.1.5.2б

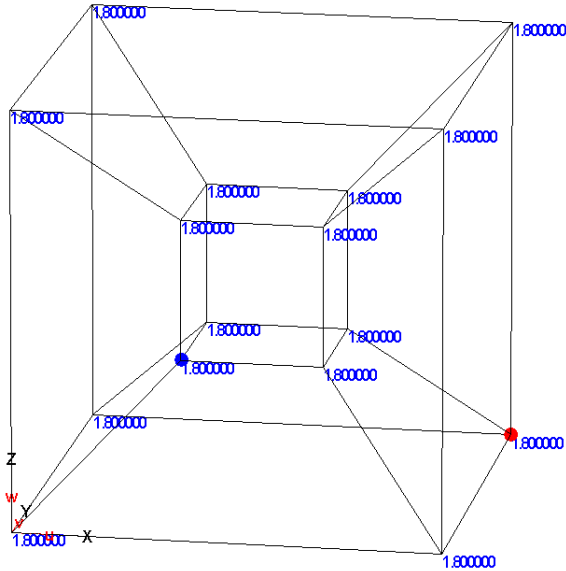


Рис. 3.1.5.2а

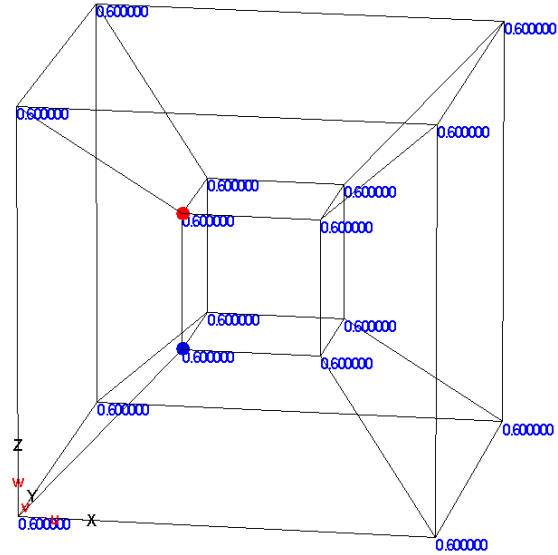


Рис. 3.1.5.2б

Нагружение 2. $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$

Результаты для σ_y приведены на рис. 3.1.5.2а, а для σ_x , σ_z рис. 3.1.5.2б

Нагружение 3. $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$

Результаты для σ_z приведены на рис. 3.1.5.2а, а для σ_x , σ_y рис. 3.1.5.2б

Нагружение 4. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$

Результаты для σ_{xy} приведены на рис. 3.1.5.3

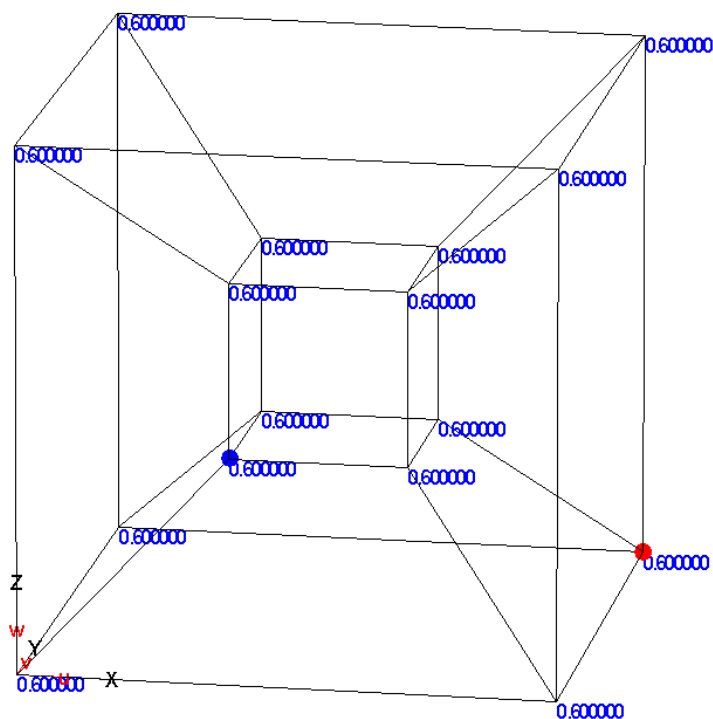


Рис. 3.1.5.3

Нагружение 5. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$, $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{xz} = 0$

Результаты для σ_{yz} приведены на рис. 3.1.5.3

Нагружение 6. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$, $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$

Результаты для σ_{xz} приведены на рис. 3.1.5.3

3.2 Проверка влияния искажения геометрии конечных элементов на точность результатов для КЭ плоской оболочки и теории упругости

1. Название задачи. Анализ изменения перемещений и напряжений в зависимости от искажения геометрии конечных элементов (дисторсия КЭ). Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается призматическое упругое тело размерами $2 \times 2 \times 10$ м в условиях чистого изгиба и прямого изгиба. Определяются перемещения в точке С и напряжения в точке В (рис.3.2.1а).

3. Исходные данные.

$E = 1500$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.25$	- коэффициент Пуассона,
$h = b = 2$ м	- размеры поперечного сечения тела;
$l = 10$ м	- длина тела.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается по восемь расчетных схем состоящих из 1, 2-х и 5-ти объемных конечных элементов теории упругости и конечных элементов плоской оболочки. На рис.3.2.1а приведены расчетные схемы для объемных КЭ, а на рис.3.2.1б – расчетные схемы А1, А7 и А8 для КЭ плоской оболочки. Краевые условия показаны на рис. 3.2.1а. Рассмотрены 4 нагружения, показанные на рис.3.2.2-3.2.5.

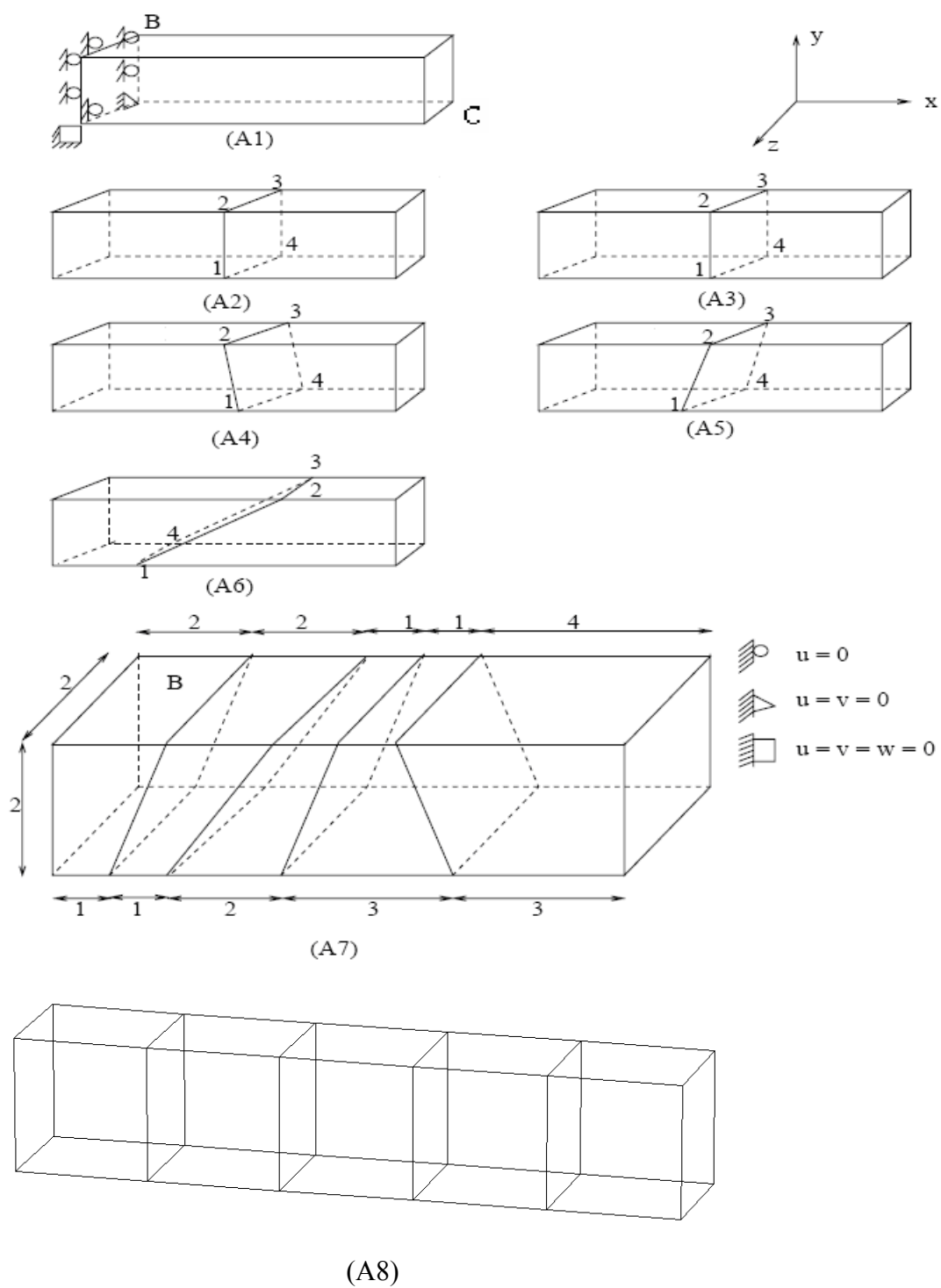


Рис.3.2.1а

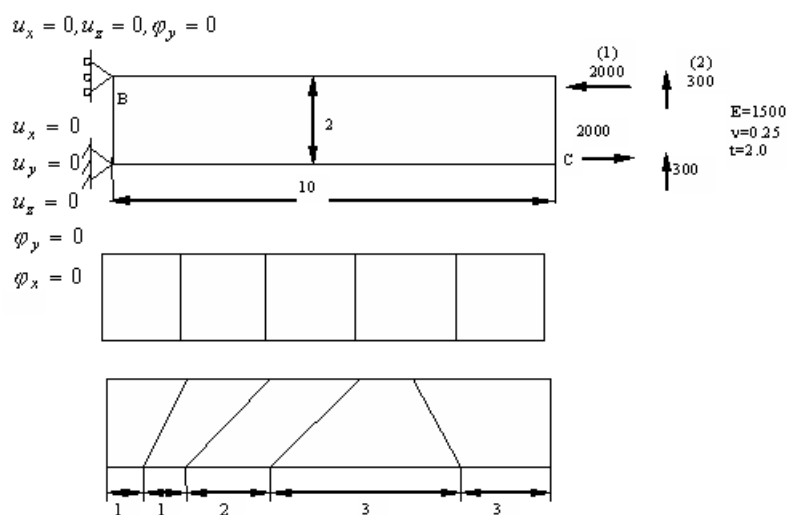


Рис.3.2.16

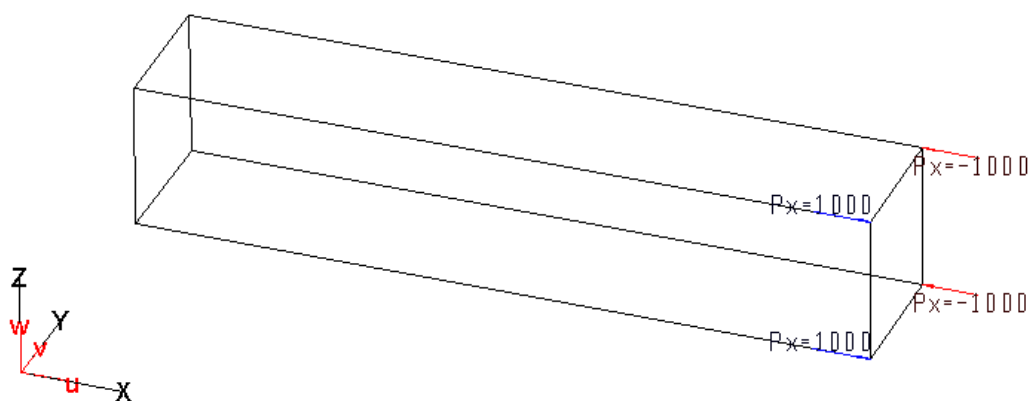


Рис.3.2.2a (Нагружение 1 - объемные КЭ, чистый изгиб относительно оси Z)

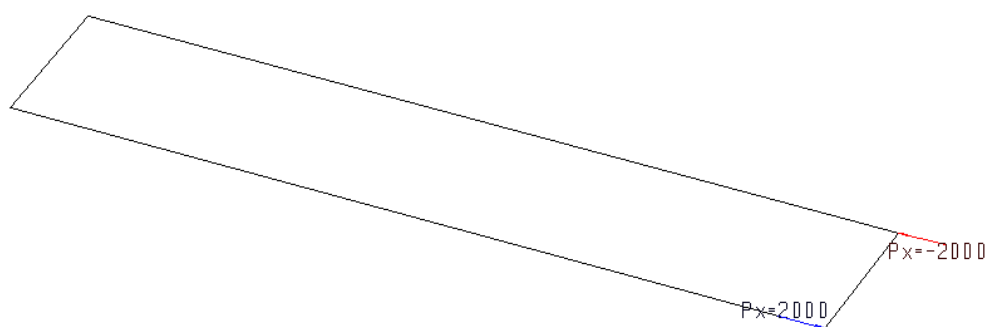


Рис.3.2.2б (Нагружение 1 – КЭ оболочки, чистый изгиб относительно оси Z)

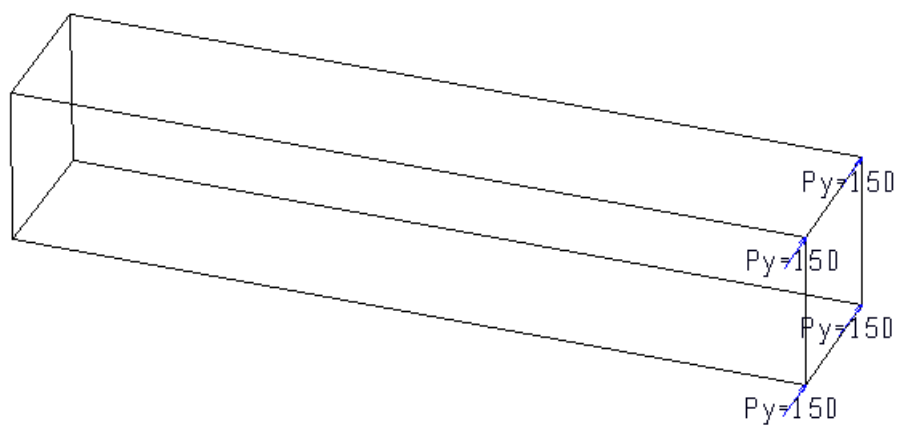


Рис.3.2.3а (Нагружение 2 - объемные КЭ, прямой изгиб относительно оси Z)

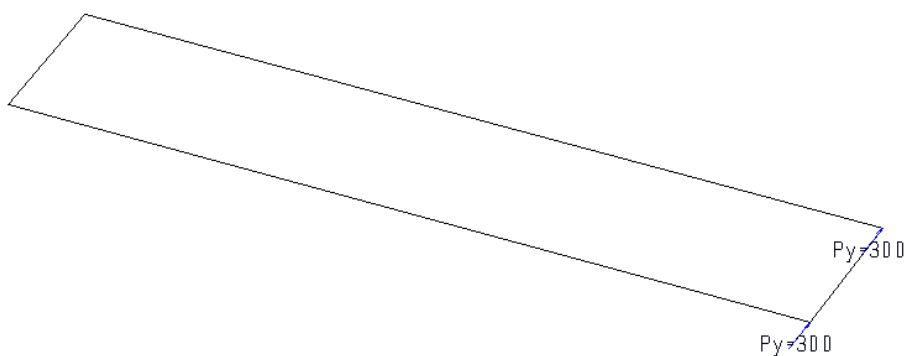


Рис.3.2.3б (Нагружение 2 – КЭ оболочки, прямой изгиб относительно оси Z)

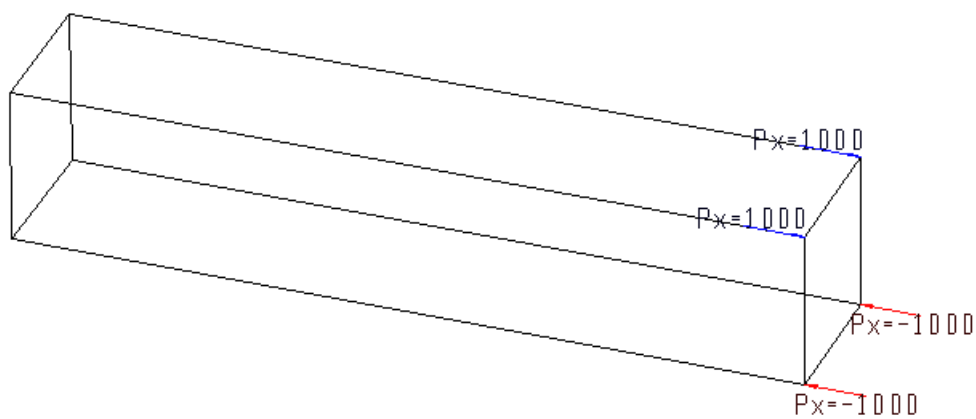


Рис.3.2.4а (Нагружение 3 - объемные КЭ, чистый изгиб относительно оси Y)

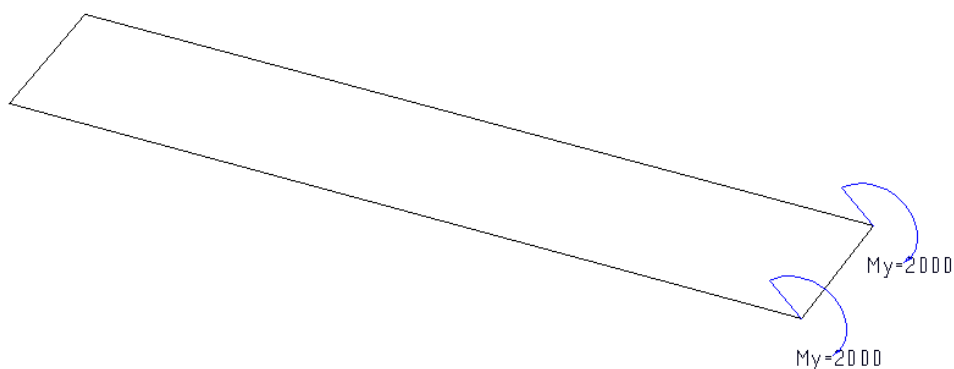


Рис.3.2.4б (Нагружение 3 – КЭ оболочки, чистый изгиб относительно оси Y)

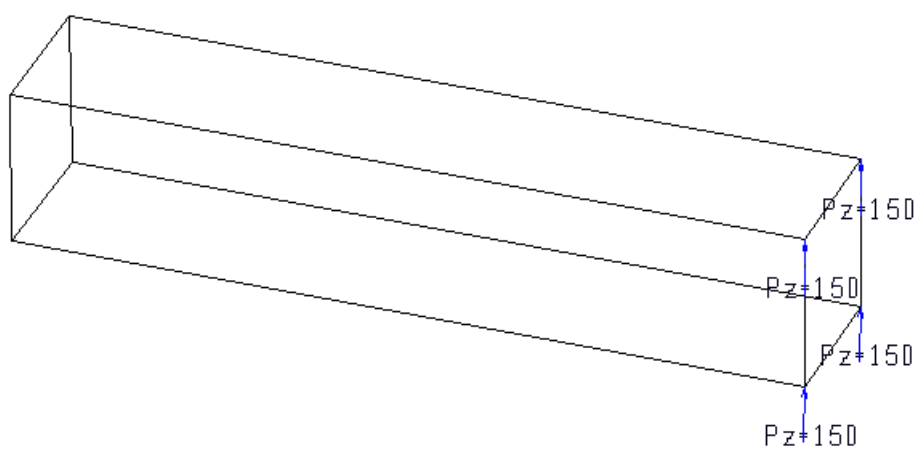


Рис.3.2.5а (Нагружение 4 - объемные КЭ, прямой изгиб относительно оси Y)

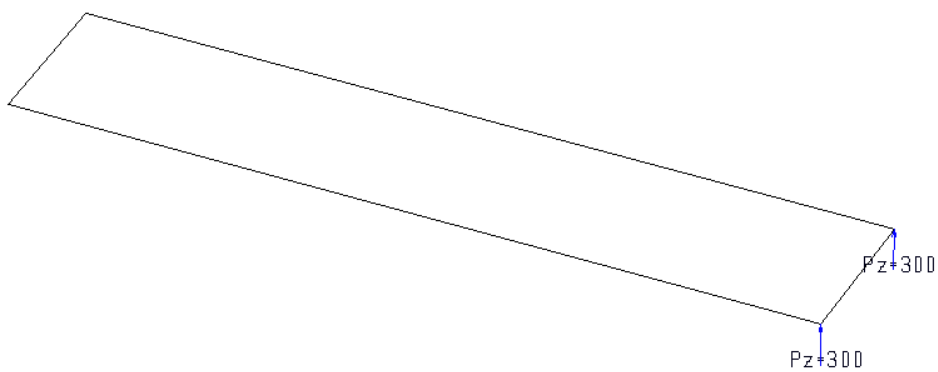


Рис.3.2.5б (Нагружение 4 – КЭ оболочки, прямой изгиб относительно оси Y)

5. Подобласть верификации. Проверка соответствия погрешностей конечных элементов при искажении геометрии (дисторсии) КЭ при нагрузках в плоскости и из плоскости элементов.

б. Аналитическое решение и численное решение по MicroFe. Сопоставление численных результатов с аналитическим для соответствующих перемещений приведено в табл.3.2.1, а для напряжений – в табл.3.2.2. В таблицах 3.2.3 и 3.2.4 приведены относительные перемещения (u_p / u_t) и напряжения (σ_p / σ_t), характеризующие относительную погрешность расчетных значений для различных моделей. В этих же таблицах для сравнения приведены результаты, получаемые при расчетах моделей A1, A7 и A8 с использованием классических изопараметрических конечных элементов (Q4).

Таблица 3.2.1 Перемещения

Модель	КЭ плоской оболочки				Объемные КЭ			
	Нагр.1	Нагр.2	Нагр.3	Нагр.4	Нагр.1	Нагр.2	Нагр.3	Нагр.4
A1	100.0	77.6	100.0	80.5	100.0	77.6	100.0	77.6
A2	100.0	96.4	100.0	99.2	100.0	96.0	100.0	96.0
A3	100.0	96.4	100.0	99.2	70.8	74.0	50.1	57.6
A4	99.3	94.5	100.0	98.4	47.4	56.9	46.4	55.5
A5	99.7	94.6	100.0	98.6	48.8	56.9	68.0	71.1
A6	94.5	85.7	100.0	93.8	19.0	32.9	22.6	33.5
A7	98.2	99.2	100.0	102.7	93.4	97.4	94.1	97.5
A8	100.0	101.8	100.0	103.5	100.0	101.6	100.0	101.6
Q4 (A1)	9.00	9.34	-	-	9.00	9.31	-	-
Q4 (A7)	38.9	45.4	-	-	44.4	49.6	-	-
Q4 (A8)	68.7	70.0	-	-	66.7	68.6	-	-
Теория	100.0	102.6	100.0	102.6	100.0	102.6	100.0	102.6

3.3 Защемленная консольная пластинка с прямым изгибом

1. Название задачи. Анализ изменения перемещений и напряжений в зависимости от искажения геометрии конечных элементов (дисторсия КЭ). Источник [Sze K., Chen W., Cheung Y. An efficient quadrilateral plane element with drilling degrees of freedom using orthogonal stress modes. Computers and Structures, Vol. 42, No 5, 1992].

2. Формулировка задачи. Рассматривается тонкая консольная пластинка размерами 12x48м и толщиной 1 м в условиях прямого изгиба. Определяются перемещения в точке А и напряжения в точке В (рис.3.3.1).

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.25$	- коэффициент Пуассона,
$h = 12$ м	- ширина пластинки;
$l = 48$ м	- длина пластинки
$t = 1$ м	- толщина тела.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается по две расчетных схемы состоящих из 4-х объемных конечных элементов теории упругости и конечных элементов плоской оболочки. На рис.3.3.1 приведены расчетные схемы КЭ плоской оболочки, а на рис.3.3.2 – расчетные схемы для объемных КЭ. Краевые условия показаны на рис. 3.3.1. Нагружение показано на этих же рисунках.

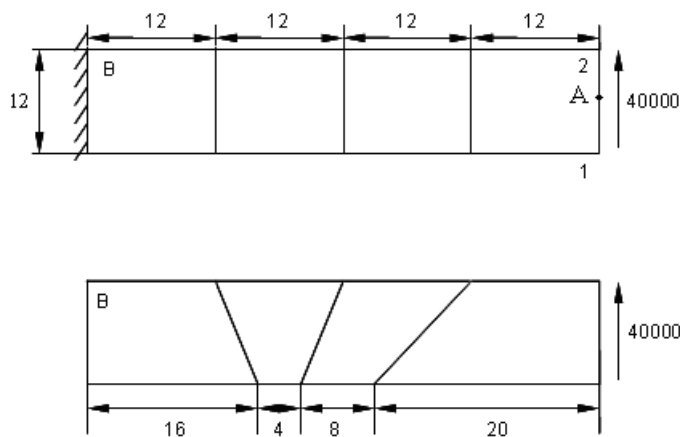


Рис.3.3.1

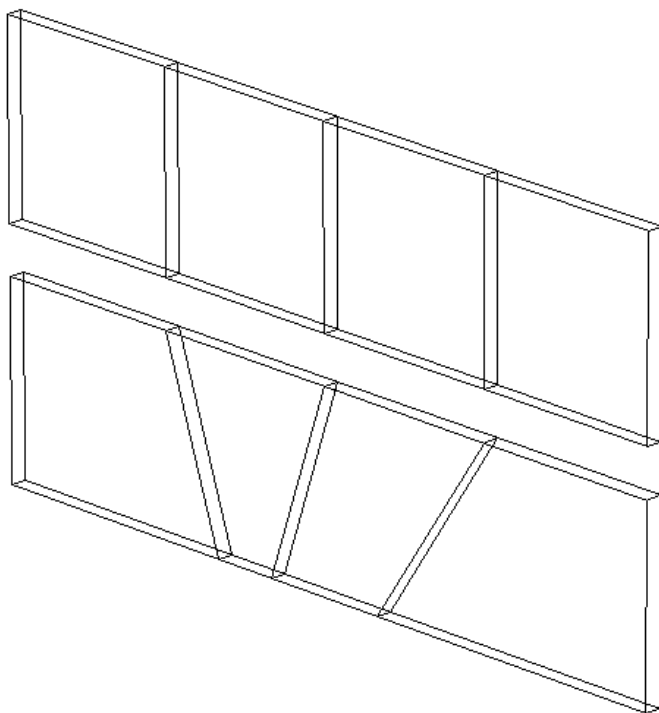


Рис.3.3.2

5. Подобласть верификации. Проверка соответствия погрешностей конечных элементов при искажении геометрии (дисторсии) КЭ при прямом изгибе.

6. Аналитическое решение и численное решение по MicroFe. Сопоставление численных результатов с аналитическим для перемещений и напряжений приведено в табл.3.3.1.

Перемещения в т.А получено линейной интерполяцией перемещений в т.1 и т.2. В таблице

3.3.2 приведены относительные перемещения (u_p / u_t) и напряжения (σ_p / σ_t),

характеризующие относительную погрешность расчетных значений. В этих же таблицах для сравнения приведены результаты, получаемые с использованием классических изопараметрических конечных элементов (Q4).

Таблица 3.3.1

Модель, КЭ	Регулярная сетка КЭ		Нерегулярная сетка КЭ	
	Перемещения	Напряжения	Перемещения	Напряжения
Оболочки	0.3495	70.0	0.3466	70.8
Объемные	0.3451	70.0	0.3258	65.4
Теория	0.3573	80.0	0.3573	80.0
Q4 (оболочки)	0.2426	50.9	0.2130	40.7
Q4 (объемные)	0.2383 (0.667)	55.2	0.2089 (0.585)	49.1

Таблица 3.3.2

Модель, КЭ	Регулярная сетка КЭ		Нерегулярная сетка КЭ	
	Перемещения (u_p / u_t)	Напряжения (σ_p / σ_t)	Перемещения (u_p / u_t)	Напряжения (σ_p / σ_t)
Оболочки	0.978	0.875	0.969	0.885
Объемные	0.966	0.875	0.912	0.818
Теория	1.000	1.000	1.000	1.000
Q4 (оболочки)	0.679	0.636	0.596	0.509
Q4 (объемные)	0.667	0.690	0.585	0.614

3.4 Защемленное консольное тело с чистым изгибом и прямым изгибом

1. Название задачи. Анализ изменения перемещений и напряжений в зависимости от искажения геометрии конечных элементов (дисторсия КЭ). Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.]

2. Формулировка задачи. Рассматривается консольное тело размерами $2 \times 2 \times 10$ м в условиях чистого и прямого изгиба. Определяются перемещения в точке А и напряжения в точке В (рис.3.4.1) в зависимости от величины дисторсии “ e ”.

3. Исходные данные.

$E = 1500$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.25$	- коэффициент Пуассона,
$h = 2$ м	- ширина поперечного сечения тела;
$l = 10$ м	- длина тела
$t = 2$ м	- толщина поперечного сечения тела.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается пять расчетных схем состоящих из 2-х конечных элементов плоской оболочки. На рис.3.4.1 приведены эти расчетные схемы. Краевые условия показаны на рис. 3.4.1. Нагрузки показаны на рис. 3.4.2.

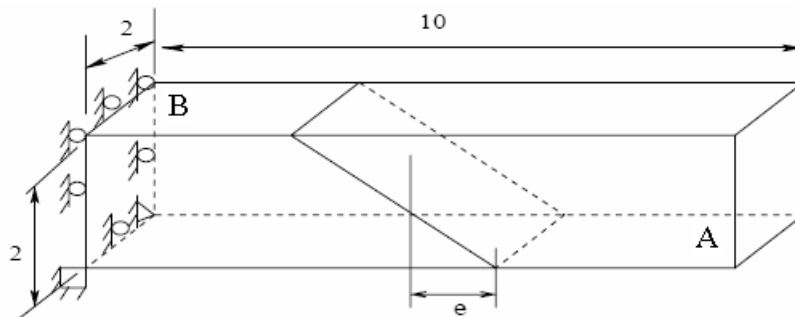


Рис.3.4.1а

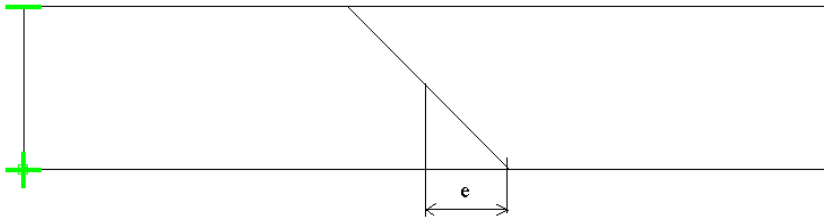


Рис.3.4.1б

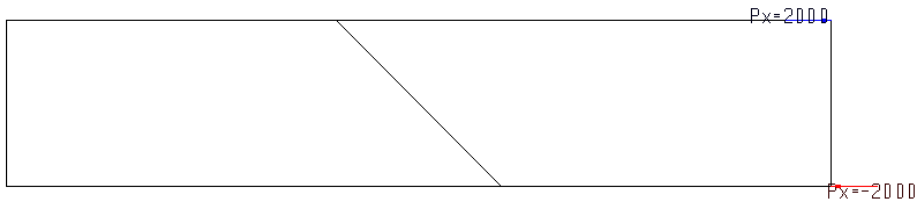


Рис.3.4.2а (чистый изгиб)

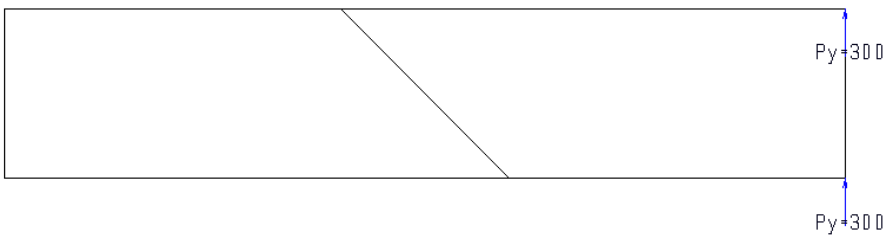


Рис.3.4.2б (прямой изгиб)

5. Подобласть верификации. Проверка соответствия погрешностей конечных элементов при искажении геометрии (дисторсии) КЭ при чистом изгибе и прямом изгибе.

6. Численное решение по MicroFe. Сопоставление численных результатов с аналитическим для перемещений u_z и напряжений σ_{xx} приведено ранее в разделе 3.2. Здесь приводятся сопоставление результатов полученных для расчетных схем с дисторсией по отношению к результатам без дисторсии. Сопоставление результатов приведено в табл.3.4.1. В табл. 3.4.2 приведены относительные перемещения (u_p / u_t) и напряжения (σ_p / σ_t), характеризующие относительную погрешность расчетных значений.

Таблица 3.4.1

e	Чистый изгиб		Прямой изгиб	
	Перемещения	Напряжения	Перемещения	Напряжения
0	100.00	3000	96.41	3360
1	97.47	3067	90.26	3561
2	86.42	3493	79.83	3923
3	68.09	3717	69.04	4839
4	50.40	3590	55.39	5327

Таблица 3.4.2

e	Чистый изгиб		Прямой изгиб	
	Перемещения (u_p / u_t)	Напряжения (σ_p / σ_t)	Перемещения (u_p / u_t)	Напряжения (σ_p / σ_t)
0	1.000	1.000	0.929	1.000
1	0.975	1.022	0.870	1.060
2	0.864	1.164	0.768	1.168
3	0.681	1.239	0.665	1.440
4	0.504	1.197	0.534	1.585
Теория	1.000	1.000	1.000	1.000

3.5 Проверка влияния переменного поперечного сечения упругого тела на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки и теории упругости

1. Название задачи. Анализ точности перемещений и напряжений в зависимости от переменного поперечного сечения упругого тела для конечных элементов. Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается защемленное по левому торцу призматическое упругое тело длиной 20 м размеры поперечного сечения которого изменяются от 2x1 м до 1x1 м в условиях единичного растяжения, единичного чистого изгиба и единичного прямого изгиба. Определяются перемещения в точке С и напряжения в точке В (рис.3.5.1).

3. Исходные данные.

$E = 1000$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$h = b = 2$ м	- размеры поперечного сечения левого торца тела;
$h = 2$ м, $b = 1$ м	- размеры поперечного сечения правого торца тела;
$l = 20$ м	- длина тела.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается две расчетных схемы состоящих из 6-ти объемных конечных элементов теории упругости и конечных элементов плоской оболочки. На рис.3.5.2а приведена расчетная схема для объемных КЭ, а на рис.3.5.2б – расчетная схема для КЭ плоской оболочки. Краевые условия соответствуют жесткому защемлению левого торца. Рассмотрены для каждой расчетной схемы 3 нагружения, показанные на рис.3.5.2-3.5.4.

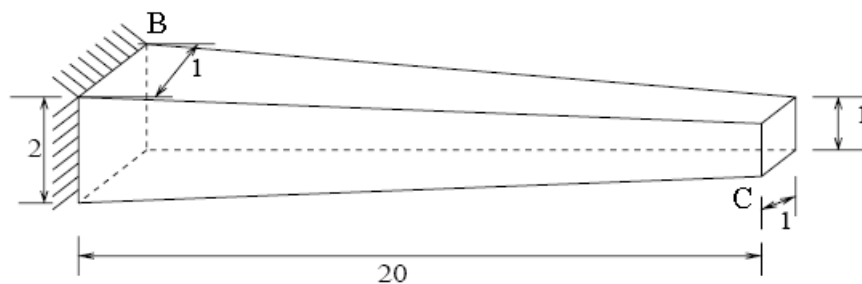


Рис.3.5.1

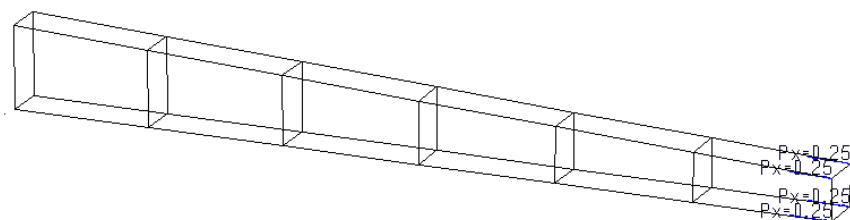


Рис.3.5.2а (Нагружение 1 - объемные КЭ, единичное растяжение)

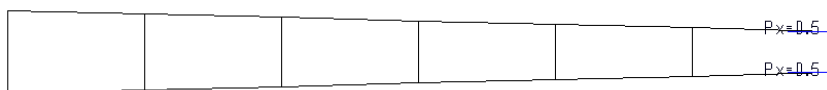


Рис.3.5.2б (Нагружение 1 – КЭ оболочки, единичное растяжение)

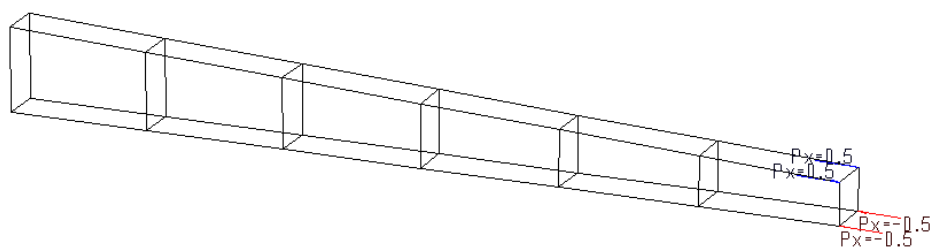


Рис.3.5.3а (Нагружение 2 - объемные КЭ, чистый изгиб)

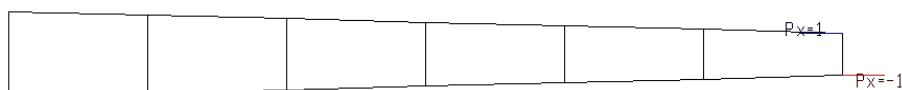


Рис.3.5.3б (Нагружение 2 – КЭ оболочки, чистый изгиб)

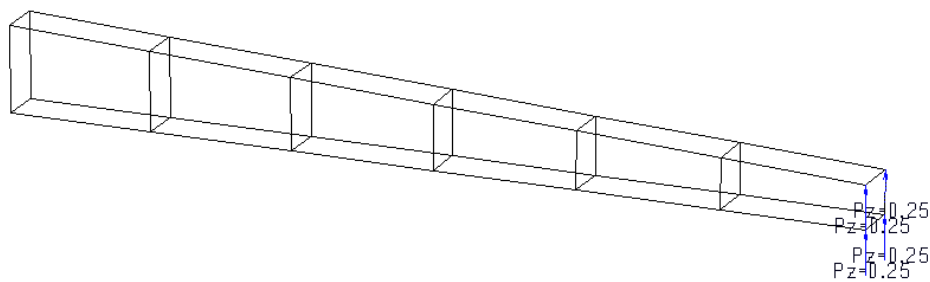


Рис.3.5.4а (Нагружение 3 - объемные КЭ, прямой изгиб)

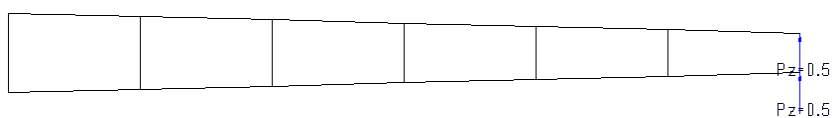


Рис.3.5.4б (Нагружение 3 – КЭ оболочки, прямой изгиб)

5. Подобласть верификации. Анализ точности перемещений и напряжений в зависимости от переменного поперечного сечения упругого тела для конечных элементов.

6. Аналитическое решение и численное решение по MicroFe. Сопоставление численных результатов с аналитическим для соответствующих перемещений приведено в табл.3.5.1, а для напряжений – в табл.3.5.2.

Таблица 3.5.1 Перемещения

	КЭ плоской оболочки			Объемные КЭ		
	Нагр.1	Нагр.2	Нагр.3	Нагр.1	Нагр.2	Нагр.3
MicroFe	0.0139	0.6032	6.5401	0.0137	0.5994	6.4579
Теория	0.0139	0.5950	6.5725	0.0139	0.5950	6.5725
(u_p / u_t)	1.0000	1.0138	0.9951	0.9856	1.0074	0.9826

Таблица 3.5.2 Напряжения

	КЭ плоской оболочки			Объемные КЭ		
	Нагр.1	Нагр.2	Нагр.3	Нагр.1	Нагр.2	Нагр.3
MicroFe	0.4805	1.6388	30.0089	0.5217	1.7075	31.1805
Теория	0.5000	1.5000	30.0000	0.5000	1.5000	30.0000
(σ_p / σ_t)	0.9610	1.0925	1.0003	1.0434	1.1383	1.0394

3.6 Проверка влияния соотношения размеров конечного элемента на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки и теории упругости

1. Название задачи. Анализ точности перемещений и напряжений в зависимости от соотношения размеров конечных элементов. Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается консольное тело размерами $2b \times 2c \times l$ в условиях чистого изгиба. Определяются перемещения в точке А и напряжения в точке В (рис.3.6.1).

3. Исходные данные.

- $E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,
- $\mu = 0.25$ - коэффициент Пуассона,
- $b = c = 0.06$ м - размеры поперечного сечения тела;
- l - длина тела (варьируется).

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается по пять расчетных схем состоящих из 1-го объемного конечного элемента теории упругости и 1-го конечного элемента плоской оболочки. На рис.3.6.1а приведена расчетная схема для объемного КЭ, а на рис.3.6.1б – расчетная схема для КЭ плоской оболочки. Краевые условия соответствуют жесткому защемлению левого торца. Рассмотрены для каждой расчетной схемы нагружения чистого изгиба, показанные на рис.3.6.1б и рис.3.6.1в.

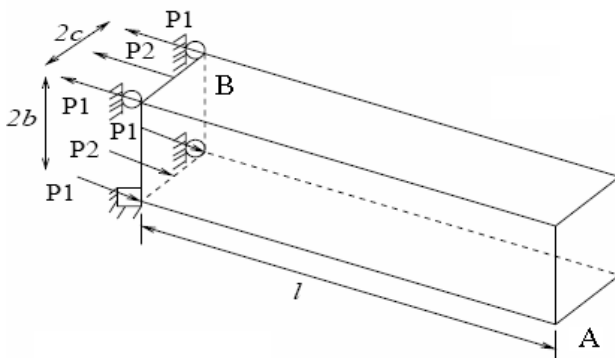


Рис.3.6.1а



Рис.3.6.1б

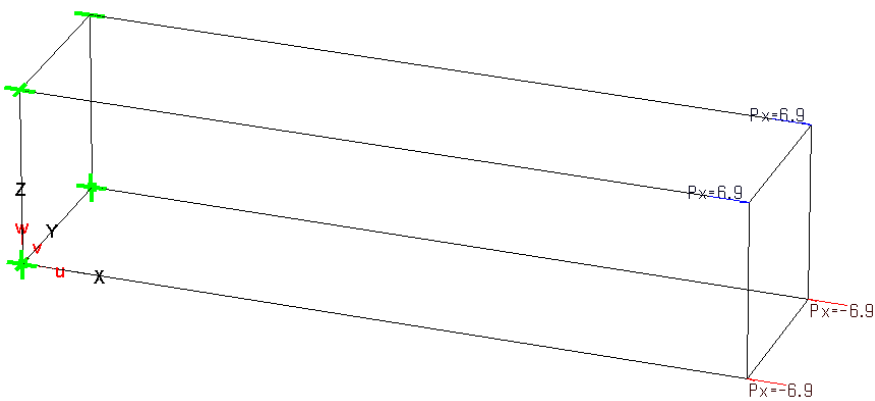


Рис.3.6.1в

5. Подобласть верификации. Анализ точности перемещений и напряжений в зависимости от соотношения размеров конечных элементов.

6. Аналитическое решение и численное решение по MicroFe. Сопоставление численных результатов с аналитическим для перемещений u_z и напряжений σ_{xx} приведено в табл.3.6.1-3.6.3. В табл. 3.6.3 приведены относительные перемещения (u_p / u_t) и напряжения (σ_p / σ_t), характеризующие относительную погрешность расчетных значений.

Таблица 3.6.1 (КЭ плоской оболочки)

2b/1	Расчет по MicroFe		Теория	
	Перемещения (*10 ⁻⁶)	Напряжения	Перемещения (*10 ⁻⁶)	Напряжения
1	3.350	5750	3.333	5750
2	13.40	5750	13.33	5750
4	53.59	5750	53.33	5750
8	214.4	5750	213.3	5750
16	857.5	5750	853.3	5750

Таблица 3.6.2 (объемный КЭ)

e	Расчет по MicroFe		Теория	
	Перемещения (*10 ⁻⁶)	Напряжения	Перемещения (*10 ⁻⁶)	Напряжения
1	3.350	5750	3.333	5750
2	13.64	5714	13.33	5750
4	53.61	5740	53.33	5750
8	213.5	5748	213.3	5750
16	853.1	5749	853.3	5750

Таблица 3.6.3

e	КЭ плоской оболочки		Объемный КЭ	
	Перемещения (u_p / u_t)	Напряжения (σ_p / σ_t)	Перемещения (u_p / u_t)	Напряжения (σ_p / σ_t)
1	1.005	1.000	1.005	1.000
2	1.005	1.000	1.023	0.994
4	1.005	1.000	1.005	0.998
8	1.005	1.000	1.001	1.000
16	1.005	1.000	1.000	1.000

3.7 Оценка точности результатов для КЭ плоской оболочки при трапецидальном и параллелограммном записаниях

1. Название задачи. Анализ точности перемещений и напряжений в зависимости от конфигурации конечных элементов. Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается консольное тело размерами $h \times t \times l$ в условиях чистого изгиба, прямого изгиба в двух плоскостях и растяжения. Определяются перемещения в точке А и напряжения в точке В (рис.3.7.1).

3. Исходные данные.

- $E = 1 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости,
 $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
 $h=0.2$ м - высота поперечного сечения тела;
 $t=0.1$ м - толщина поперечного сечения тела;
 $l=6$ м - длина тела.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается три расчетных схемы состоящих из 6-го конечных элементов плоской оболочки (рис3.7.1). Краевые условия соответствуют жесткому защемлению левого торца. Нагрузки приведены на рис.3.7.2.

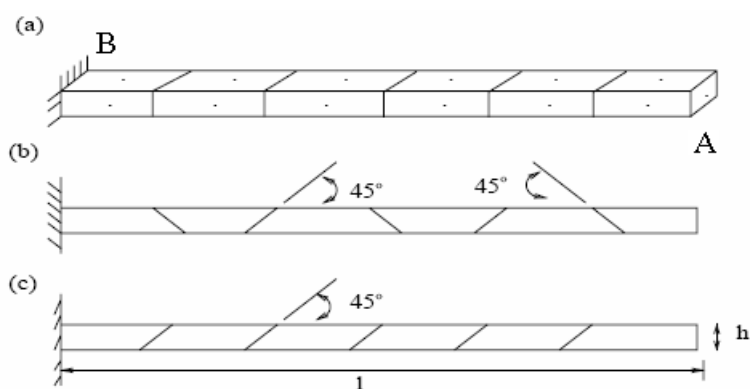


Рис.3.7.1

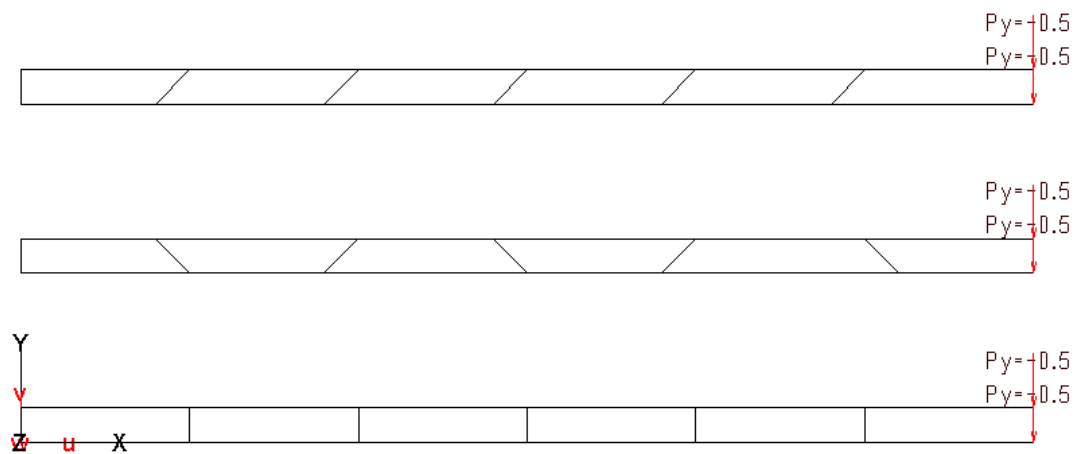


Рис.3.7.2а (нагрузка 1)

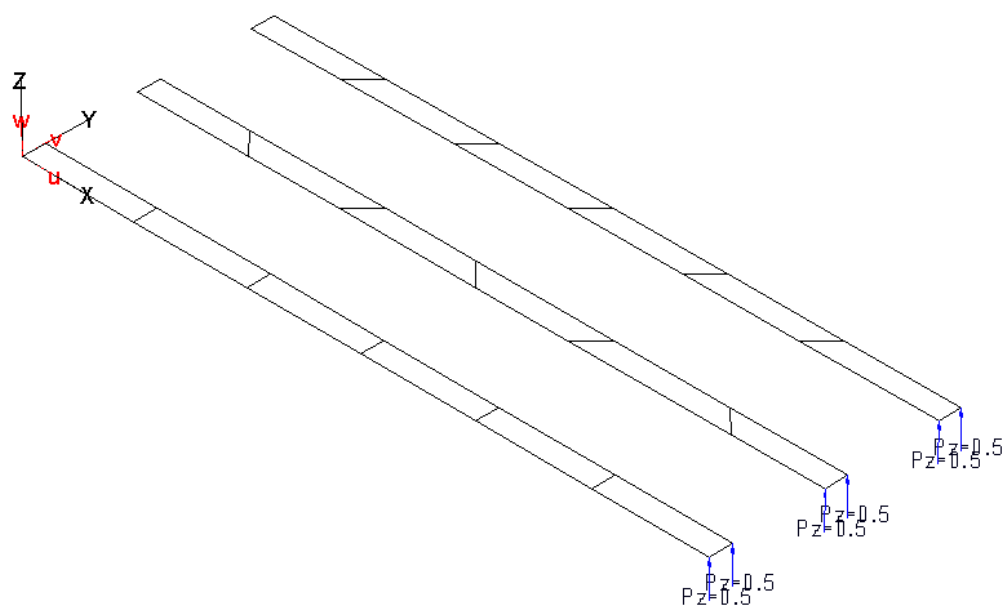


Рис.3.7.2б (нагрузка 2)

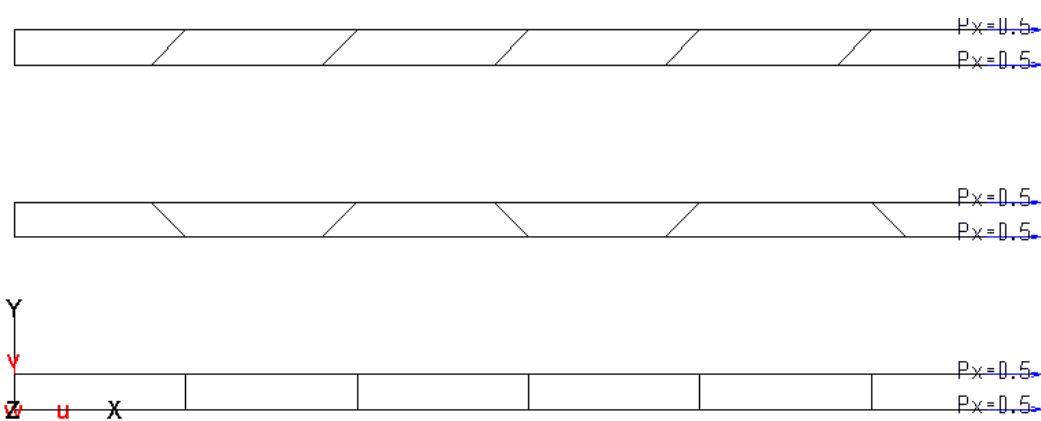


Рис.3.7.2в (нагрузка 3)

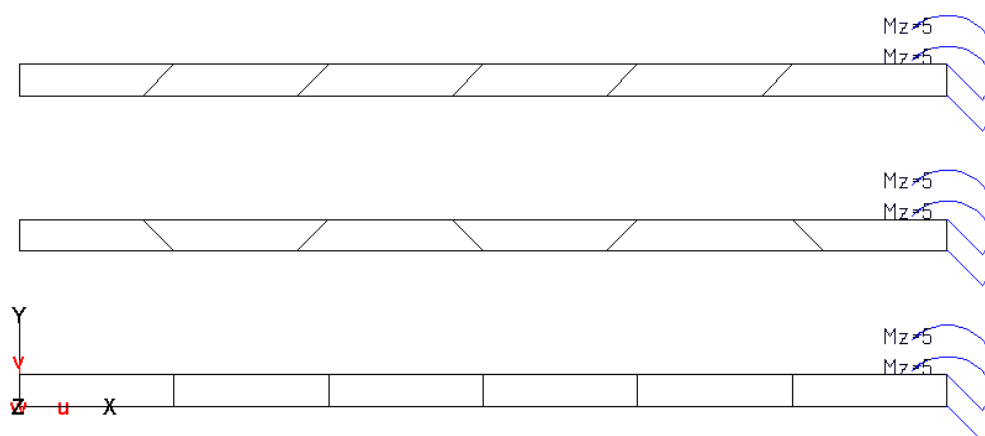


Рис.3.7.2г (нагружение 4)

5. Подобласть верификации. Оценка точности результатов для КЭ плоской оболочки при трапецидальном и параллелограммном запирациях.

6. Аналитическое решение и численное решение по MicroFe. Сопоставление численных результатов с теоретическими для перемещений в т. А и напряжений в точке В приведено в табл.3.7.1-3.7.4. В табл. 3.6.3 приведены относительные перемещения (u_p / u_t) и напряжения (σ_p / σ_t), характеризующие относительную погрешность расчетных значений. В таблицах 3.7.1 и 3.7.2 для сравнения приведены результаты, получаемые с использованием классических изопараметрических конечных элементов (Q4).

Таблица 3.7.1 Перемещения

	Нагружение 1			Нагружение 2		
	Равн.	Трапец.	Парал.	Равн.	Трапец.	Парал.
MicroFe, u	0.1073	0.1036	0.1042	0.4239	0.4169	0.4238
MicroFe, u / u_t	0.993	0.958	0.964	0.981	0.965	0.981
Теория	0.1081	0.1081	0.1081	0.4321	0.4321	0.4321
Q4, u	0.0101	0.0029	0.0037	-	-	-
Q4, u / u_t	0.093	0.027	0.034	-	-	-

Таблица 3.7.2 Перемещения

	Нагружение 3			Нагружение 4		
	Равн.	Трапец.	Парал.	Равн.	Трапец.	Парал.
MicroFe, u	3.00×10^{-5}	3.01×10^{-5}	2.99×10^{-5}	0.2668	0.2531	0.2681
MicroFe, u / u_t	1.000	1.003	0.997	0.988	0.937	0.993
Теория	3.00×10^{-5}	3.00×10^{-5}	3.00×10^{-5}	0.2700	0.2700	0.2700
Q4, u	-	-	-	0.0251	0.0059	0.0084
Q4, u / u_t	-	-	-	0.093	0.022	0.031

Таблица 3.7.3 Напряжения

	Нагружение 1			Нагружение 2		
	Равн.	Трапец.	Парал.	Равн.	Трапец.	Парал.
MicroFe, σ	8250.0	8444.4	8194.7	17405.8	17218.0	16992.7
MicroFe, σ / σ_t	0.917	0.938	0.911	0.967	0.957	0.944
Теория	9000.0	9000.0	9000.0	18000.0	18000.0	18000.0

Таблица 3.7.4 Напряжения

	Нагружение 3			Нагружение 4		
	Равн.	Трапец.	Парал.	Равн.	Трапец.	Парал.
MicroFe, σ	52.39	50.33	54.35	15000.0	15364.7	17701.2
MicroFe, σ / σ_t	1.048	1.007	1.087	1.000	1.024	1.180
Теория	50.00	50.00	50.00	15000.0	15000.0	15000.0

3.8 Проверка влияния коэффициента Пуассона на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки и теории упругости (прямоугольная область)

1. Название задачи. Анализ точности определения перемещений в зависимости от значений коэффициента Пуассона близких к 0.5. Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается консольное тело размерами 2x2x10м в условиях прямого изгиба. Определяются перемещения в точке А (рис.3.8.1).

3. Исходные данные.

- $E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,
 μ - коэффициент Пуассона (варьируется),
 $b = c = 2$ м - размеры поперечного сечения тела;
 $l = 10$ м - длина тела.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается по восемь расчетных схем состоящих из 5-ти конечных элементов регулярной и нерегулярной геометрии. Для объемных КЭ схемы показаны на рис.3.8.1а, а для КЭ плоской оболочки – на рис.3.8.1б. Краевые условия показаны на этих же рисунках. Рассмотрено для каждой расчетной схемы нагружение прямого изгиба, показанное на рис.3.8.2а и рис.3.8.2б.

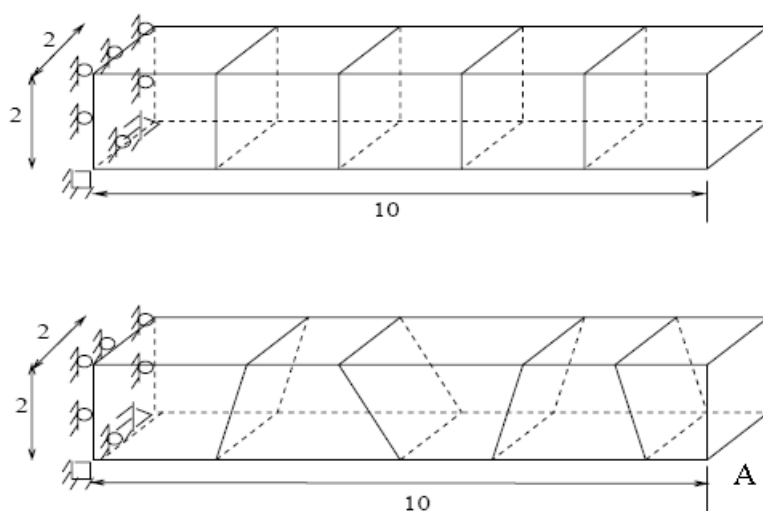


Рис.3.8.1а

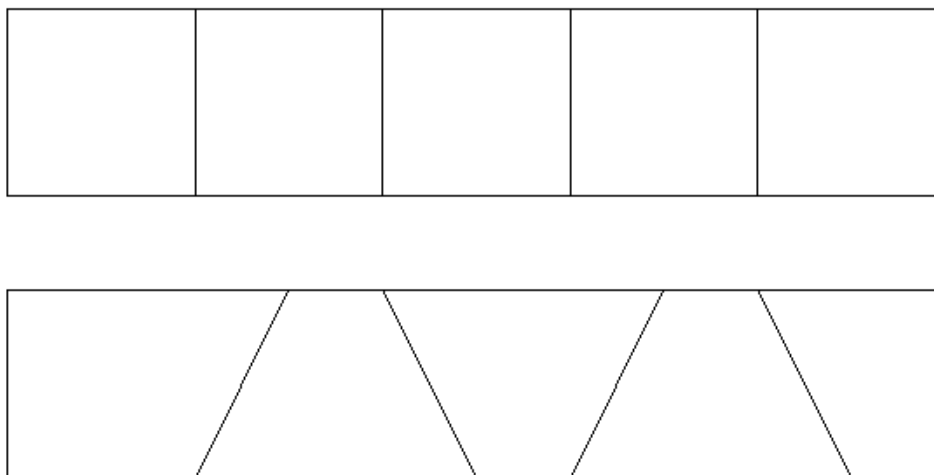


Рис.3.8.16

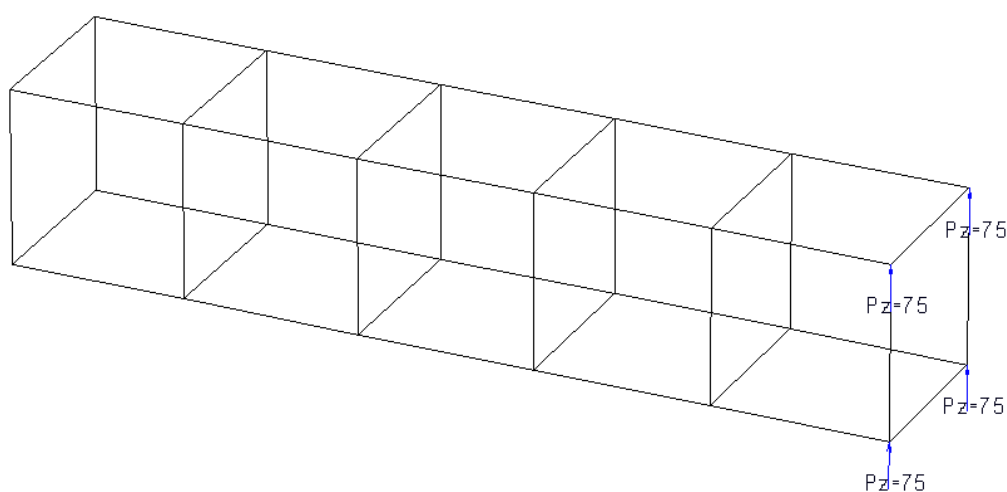


Рис.3.8.2a

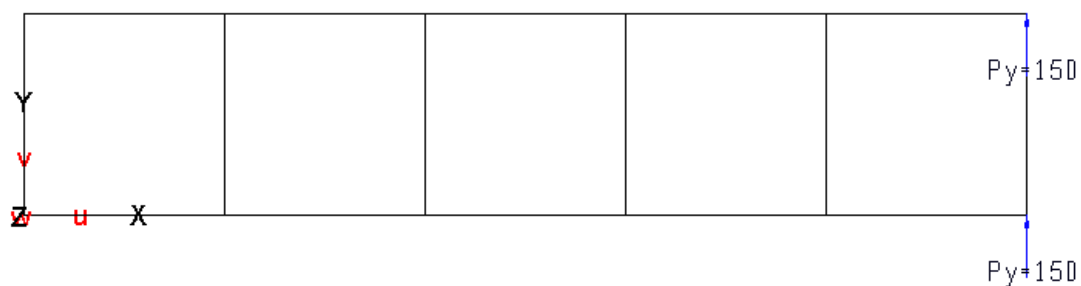


Рис.3.8.2б

5. Подобласть верификации. Анализ точности перемещений в зависимости от значений коэффициента Пуассона (Пуассоново запырание).

6. Численное решение по MicroFe. Здесь приводятся сопоставление результатов перемещений полученных для расчетных схем с различными значениями коэффициента Пуассона по отношению к перемещениям полученным для расчетных схем при $\mu=0.3$. Сопоставление результатов приведено в табл.3.8.1.-3.8.2.

Таблица 3.8.1 (КЭ плоской оболочки)

μ	Регулярная	Нерегулярная	Теория
	$\nu / \nu_{0.3}^r$	$\nu / \nu_{0.3}^{ir}$	$\nu_t / \nu_{t,0.3}$
0.3	1.000000	1.000000	1.000000
0.4	1.001943	1.003012	1.002327
0.49	1.003690	1.004727	1.004422
0.499	1.003847	1.004847	1.004629
0.4999	1.003866	1.004867	1.004642
0.49999	1.003866	1.004867	1.004642
0.499999	1.003866	1.004867	1.004642
0.4999999	1.003866	1.004867	1.004642

Таблица 3.8.2 (объемный КЭ)

μ	Регулярная	Нерегулярная	Теория
	$\nu / \nu_{0.3}^r$	$\nu / \nu_{0.3}^{ir}$	$\nu_t / \nu_{t,0.3}$
0.3	1.000000	1.000000	1.000000
0.4	0.998720	1.001754	1.002327
0.49	0.997379	0.998372	1.004422
0.499	0.997280	0.997729	1.004629
0.4999	0.997267	0.997661	1.004642
0.49999	0.997265	0.997653	1.004642
0.499999	0.997265	0.997653	1.004642
0.4999999	0.997265	0.997653	1.004642

3.9 Проверка влияния коэффициента Пуассона на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки (цилиндрическая область)

1. Название задачи. Анализ точности определения перемещений в зависимости от значений коэффициента Пуассона близких к 0.5 для плоско-деформированного состояния. Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается фрагмент цилиндрического тела размеры, которого приведены на рис.3.9.1 под внутренним давлением. Определяются радиальные перемещения для точек внутреннего радиуса при плоско-деформированном состоянии (рис.3.9.1).

3. Исходные данные.

$E = 1 \cdot 10^3$ кПа	- модуль упругости,
μ	- коэффициент Пуассона (варьируется),
$r = 3$ м	- внутренний радиус;
$R = 9$ м	- внешний радиус;
$P = 1$ кН/м ²	- внутреннее давление.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается расчетная схема состоящая из 35-ти конечных элементов плоской оболочки(рис.3.9.1). Краевые условия показаны на этом же рисунке.

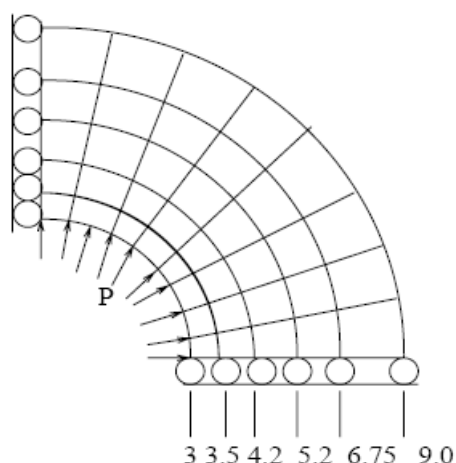


Рис.3.9.1

5. Подобласть верификации. Анализ точности перемещений в зависимости от значений коэффициента Пуассона (Пуассоново записание).

6. Численное решение по MicroFe. В табл.3.9.1 приводится сопоставление результатов радиальных перемещений точек внутреннего радиуса полученных для расчетных схем с различными значениями коэффициента Пуассона по отношению к точным решениям. В этой же таблице для сравнения приведены результаты, получаемые с использованием классических изопараметрических конечных элементов (Q4).

Таблица 3.9.1

μ	MicroFe			Теория		Q4		
	$\nu * 10^{-3}$	$\nu / \nu_{0.3}$	ν / ν^t	$\nu^t * 10^{-3}$	$\nu^t / \nu_{0.3}^t$	$\nu * 10^{-3}$	$\nu / \nu_{0.3}$	ν / ν^t
0.3	4.5359	1.0000	0.9898	4.5825	1.0000	4.5183	1.0000	0.986
0.49	4.9631	1.0942	0.9848	5.0399	1.0998	4.2587	0.9425	0.845
0.499	4.9822	1.0984	0.9846	5.0602	1.1042	-----	-----	-----
0.4999	4.9824	1.0984	0.9842	5.0623	1.1047	0.2683	0.0594	0.053

3.10 Проверка влияния мембранного запираания на точность результатов для конечных элементов плоской оболочки

1. Название задачи. Анализ точности определения перемещений и напряжений для непрямоугольных КЭ плоской оболочки при прямом изгибе. Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается косоугольное тело размеры которого приведены на рис.3.10.1, подверженное прямому изгибу. Определяются вертикальные перемещения в т. С, максимальные напряжения в т. А и минимальные напряжения в т. В (рис.3.10.1).

3. Исходные данные.

$E = 1$ кПа - модуль упругости,
 $\mu = 0.333$ - коэффициент Пуассона,
 $t = 1$ м - толщина тела;
 $F = 1$ кН - внешняя нагрузка.

4. Конечноэлементная модель. Рассматриваются три расчетные схемы состоящие из 4-х (сетка 2x2), 16-ти (сетка 4x4) и 64-х (сетка 8x8) конечных элементов плоской оболочки (рис.3.10.2). Краевые условия показаны на рис.3.10.1.

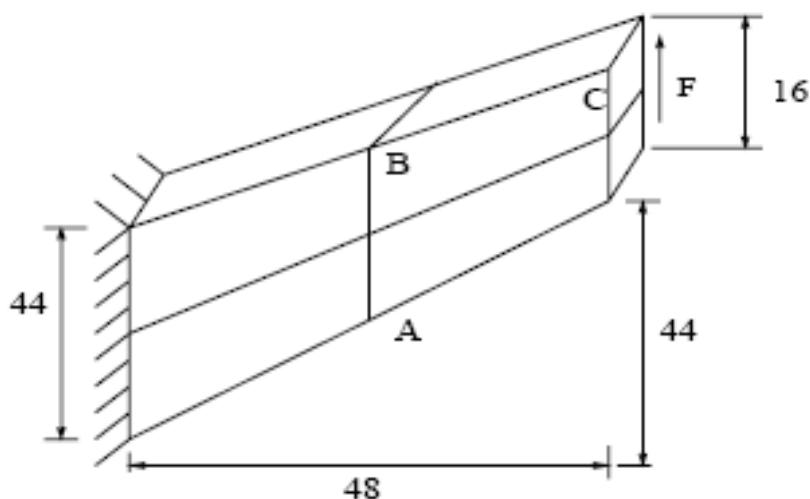


Рис.3.10.1

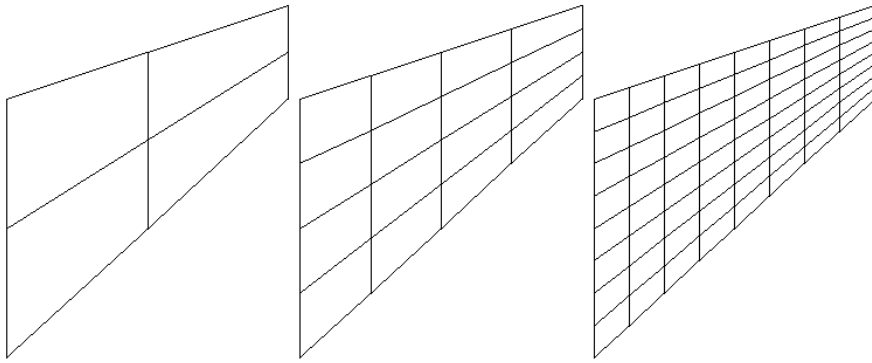


Рис.3.10.2

5. Подобласть верификации. Анализ точности перемещений и напряжений для косоугольных конечных элементов (мембранное запырание).

6. Численное решение по MicroFe. В табл.3.10.1 приводятся значения перемещений и напряжений для различных сеток. Там же приведены теоретические результаты и результаты, получаемые с использованием классических изопараметрических конечных элементов (Q4). В табл.3.10.2 приведены относительные значения перемещений и напряжений для различных сеток.

Таблица 3.10.1

	2x2			4x4			8x8		
	v^C	σ_{max}^A	$-\sigma_{min}^B$	v^C	σ_{max}^A	$-\sigma_{min}^B$	v^C	σ_{max}^A	$-\sigma_{min}^B$
MicroFe	22.10	0.1877	0.2064	23.42	0.2289	0.2050	23.78	0.2358	0.2035
Теория	23.90	0.2360	0.2010	23.90	0.2360	0.2010	23.90	0.2360	0.2010
Q4	11.85	0.1031	0.1071	18.31	0.1784	0.1445	-----	-----	-----

Таблица 3.10.2

	2x2			4x4			8x8		
	v^C / v_t	σ^A / σ_t^A	$-\sigma^B / \sigma_t^B$	v^C / v_t	σ^A / σ_t^A	$-\sigma^B / \sigma_t^B$	v^C / v_t	σ^A / σ_t^A	$-\sigma^B / \sigma_t^B$
MicroFe	0.925	0.795	1.027	0.980	0.970	1.020	0.995	0.999	1.012
Теория	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Q4	0.496	0.437	0.533	0.766	0.756	0.719	-----	-----	-----

3.11 Проверка КЭ изгибаемой плиты для чистого изгиба, поперечного сдвига и кручения

1. Название задачи. Patch тесты для изгибаемых плит. Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается изгибаемая плита размеры которой приведены на рис.3.11.1. На этом же рисунке показаны нагрузки и краевые условия. Определяются максимальные вертикальные перемещения, максимальные нормальные напряжения (для нагрузений изгиба) и максимальное касательное напряжение (для нагружения кручения).

3. Исходные данные.

$E = 10000$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$t = 1$ м	- толщина плиты;
$M = 2$ кНм	- внешний изгибающий момент на левый торец плиты;
$F = 4$ кН	- внешняя поперечная нагрузка на левый торец плиты;
$T = 2$ кН	- внешний крутящий момент на левый торец и заднюю грань

плиты.

4. Конечноэлементная модель. Рассматриваются для каждого нагружения три расчетные схемы состоящие из 1-го и 9-ти (регулярная и нерегулярная сетки) конечных элементов плоской оболочки (рис.3.11.1). Краевые условия для различных нагружений показаны на рис.3.11.1.

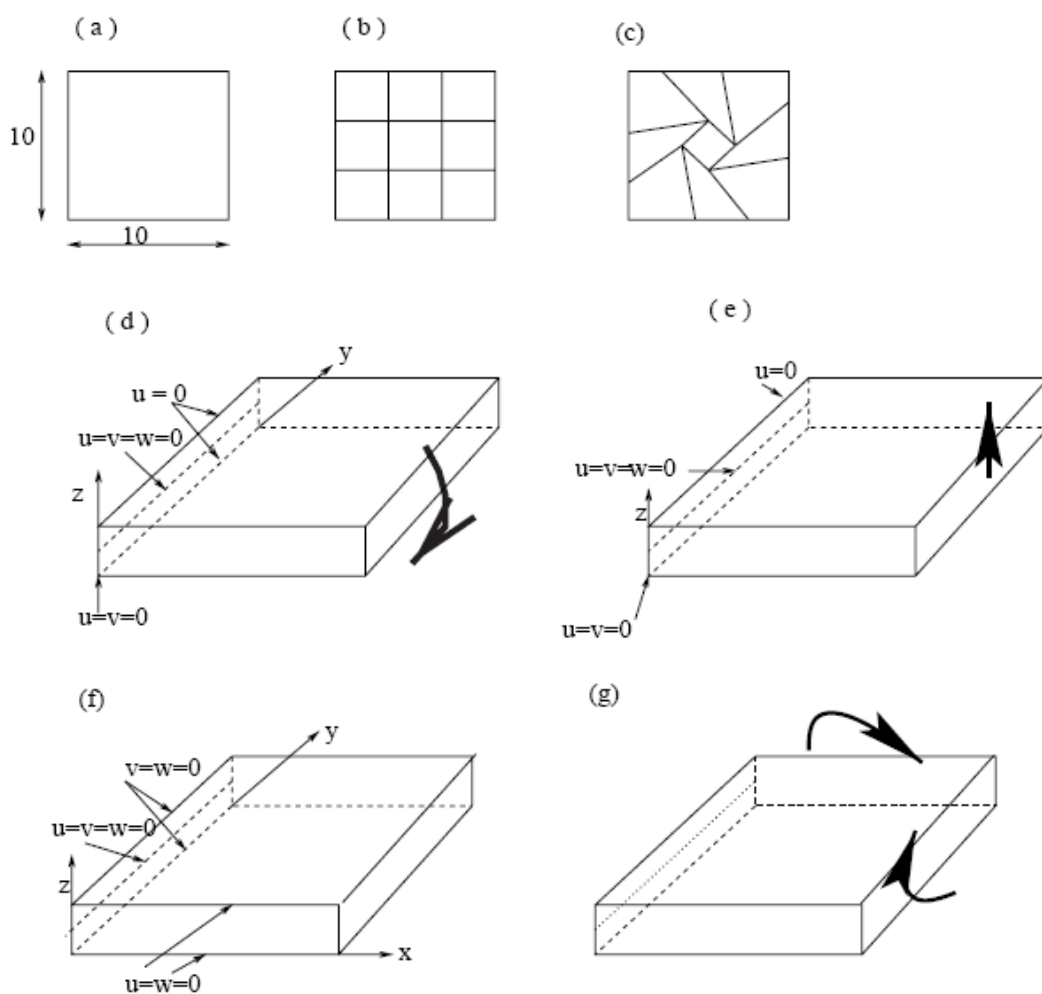


Рис.3.11.1

5. Подобласть верификации. Анализ точности перемещений и напряжений для изгибного напряженного состояния.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.11.1 – 3.11.3 приводятся значения перемещений и напряжений для различных сеток для чистого изгиба, поперечного сдвига и кручения соответственно. Так как, в MicroFe, кроме теории изгиба плит Рейснера-Миндлина, реализована также и теория изгиба плит Кирхгофа-Лява, приводятся результаты для обеих теорий.

Таблица 3.11.1 (чистый изгиб)

	Схема (a)		Схема (b)		Схема (c)	
	W	σ_{xx}	W	σ_{xx}	W	σ_{xx}
MicroFe (Миндлин)	0.010	1.1480	0.012	1.1773	0.012	1.1563
MicroFe (Кирхгоф)	0.011	1.2000	0.012	1.2000	0.012	1.1750
Эталон	0.012	1.2	0.012	1.2	0.012	1.2

Таблица 3.11.2 (поперечный сдвиг)

	Схема (a)		Схема (b)		Схема (c)	
	W	σ_{xx}	W	σ_{xx}	W	σ_{xx}
MicroFe (Миндлин)	0.141	21.2251	0.151	21.4996	0.150	21.4021
MicroFe (Кирхгоф)	0.147	24.0000	0.151	24.0000	0.150	23.1600
Эталон	0.16	24.0	0.16	24.0	0.16	24.0

Таблица 3.11.3 (кручение)

	Схема (a)		Схема (b)		Схема (c)	
	W	m_{xy}	W	m_{xy}	W	m_{xy}
MicroFe (Миндлин)	0.0312	0.2000	0.0312	0.2000	0.0312	0.2000
MicroFe (Кирхгоф)	0.0312	0.2927	0.0312	0.2527	0.0312	0.2405
Эталон	0.0312	0.2	0.0312	0.2	0.0312	0.2

3.12 Проверка сходимости КЭ изгибаемой плиты для прямоугольной области

1. Название задачи. Тесты на сходимость перемещений для прямоугольной изгибаемой плиты. Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается шарнирно опертая и защемленная по контуру прямоугольная изгибаемая плита, нагруженная сосредоточенной нагрузкой в центре плиты и равномерно-распределенной нагрузкой (рис.3.12.1). Определяются вертикальные перемещения в центре плиты.

3. Исходные данные.

$E = 1.7472 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$t = 0.01$ м - толщина плиты;

$a = 2$ м - ширина плиты;

$b = 2$ и 10 м - длина плиты;

$P = 4 \cdot 10^4$ кН - сосредоточенная сила в центре плиты;

$q = 1 \cdot 10^4$ кН/м² - равномерно распределенная нагрузка по области плиты.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается два варианта расчетных схем (вариант а) - регулярная сетка и вариант б) - нерегулярная сетка) из конечных элементов плоской оболочки размерностью – 2x2, 4x4, 8x8 и 16x16 для соотношения $b/a = 1$ и 2x10, 4x20, 8x40 и 16x80 для соотношения $b/a = 5$ (рис.3.12.2).

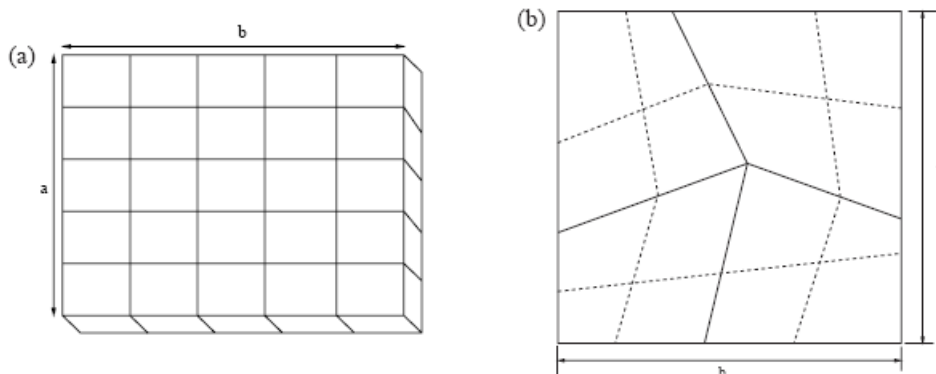


Рис.3.12.1

3.13 Проверка сдвигового записания КЭ изгибаемой плиты

1. Название задачи. Тесты на сдвиговое записание для прямоугольной изгибаемой плиты. Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается шарнирно опертая по контуру квадратная изгибаемая плита, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой (рис.3.13.1). Определяются вертикальные перемещения в центре плиты и распределение реакций по контуру плиты.

3. Исходные данные.

$E = 1.7472 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$t = (10^{-7} - 0.4)a$ - толщина плиты;

$a = 2$ м - ширина плиты;

$b = 2$ м - длина плиты;

$q = 1 \cdot 10^4$ кН/м² - равномерно распределенная нагрузка по области плиты.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается два варианта расчетных схем (вариант а) - регулярная сетка и вариант б) - нерегулярная сетка) из конечных элементов плоской оболочки размерностью 8x8 (рис.3.13.2).

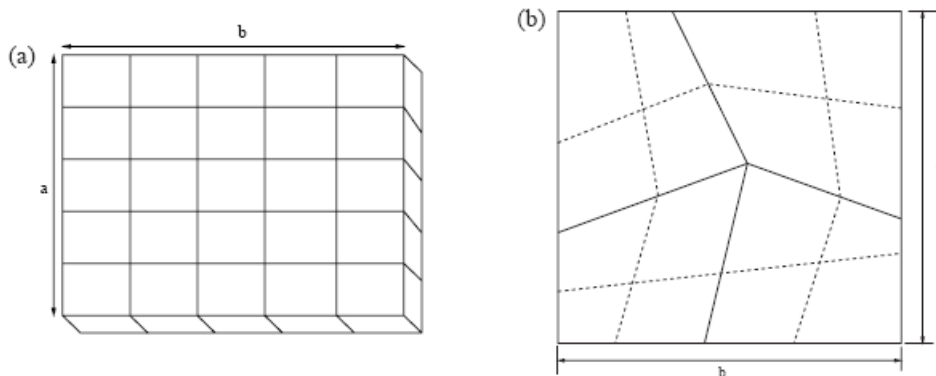


Рис.3.13.1

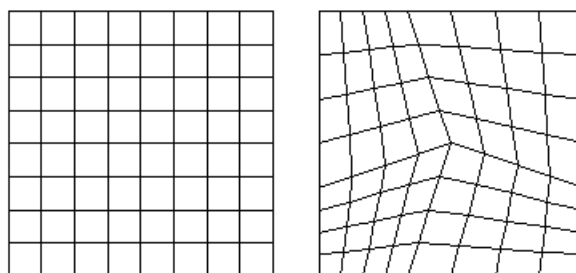


Рис.3.13.2

5. Подобласть верификации. Анализ сдвигового запираания конечных элементов изгиба теории Рейснера-Миндлина.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.13.1 – 3.13.2 приводятся нормированные значения вертикальных перемещений в центре плиты для различных соотношений толщины и длины плиты. Табл.3.13.1 соответствует регулярной сетке, а табл.3.13.2 - нерегулярной сетке. Эталонные значения перемещений вычислялись по формуле $w_c = 0.00406 * D^{-1} q a^4 (1 + 4.6(t/a)^2)$ [Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982]. Нормированные перемещения определялись по формуле

$$\bar{w}_c = w_c \frac{D}{q a^4} 10^3 = 4.06 (1 + 4.6(t/a)^2). \text{ На рис.3.13.1-3.13.4 показано распределение по}$$

опорному контуру узловых реакций $A_z * 10^6$ для $t/a = 0.4$, $t/a = 0.01$, $t/a = 10^{-4}$ и $t/a = 10^{-7}$. Как видно из таблиц и рисунков сдвиговое запираание для ПК MicroFe отсутствует. Этот вывод можно было сделать уже на основе анализа собственных значений матрицы жесткости приведенном в п.3.1.

Таблица 3.13.1

t/a	10^{-7}	10^{-5}	10^{-4}	0.01	0.05	0.1	0.2	0.4
MicroFe	4.06	4.06	4.06	4.07	4.12	4.28	4.92	7.47
Эталон	4.06	4.06	4.06	4.06	4.11	4.25	4.81	7.05

Таблица 3.13.2

t/a	10^{-7}	10^{-5}	10^{-4}	0.01	0.05	0.1	0.2	0.4
MicroFe	4.06	4.06	4.06	4.06	4.11	4.27	4.91	7.46
Эталон	4.06	4.06	4.06	4.06	4.11	4.25	4.81	7.05

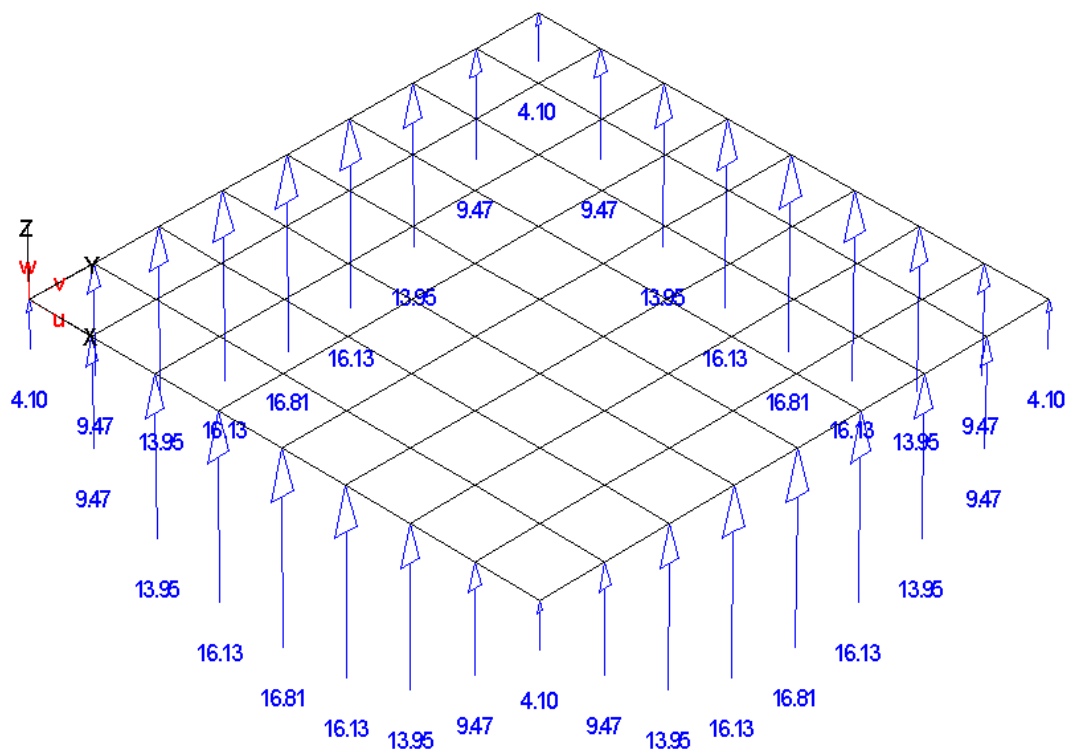


Рис. 3.13.1 Реакции $A_z \cdot 10^6$ ($t/a = 0.4$)

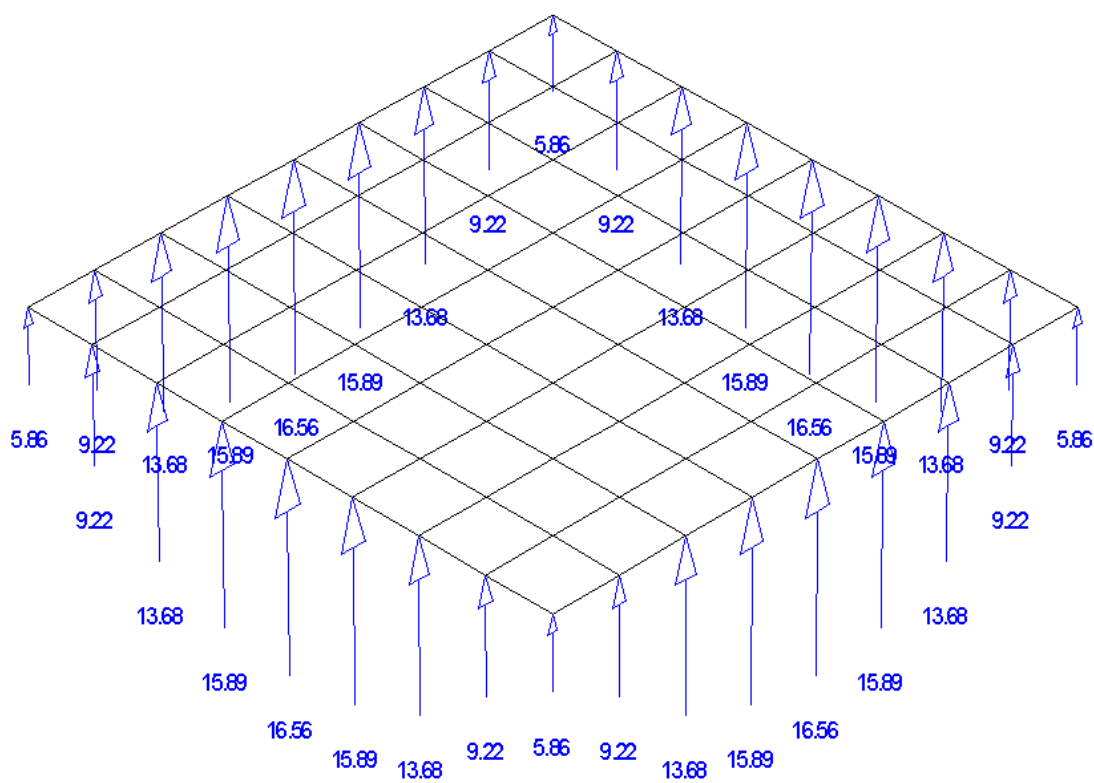


Рис. 3.13.2 Реакции $A_z \cdot 10^6$ ($t/a = 0.01$)

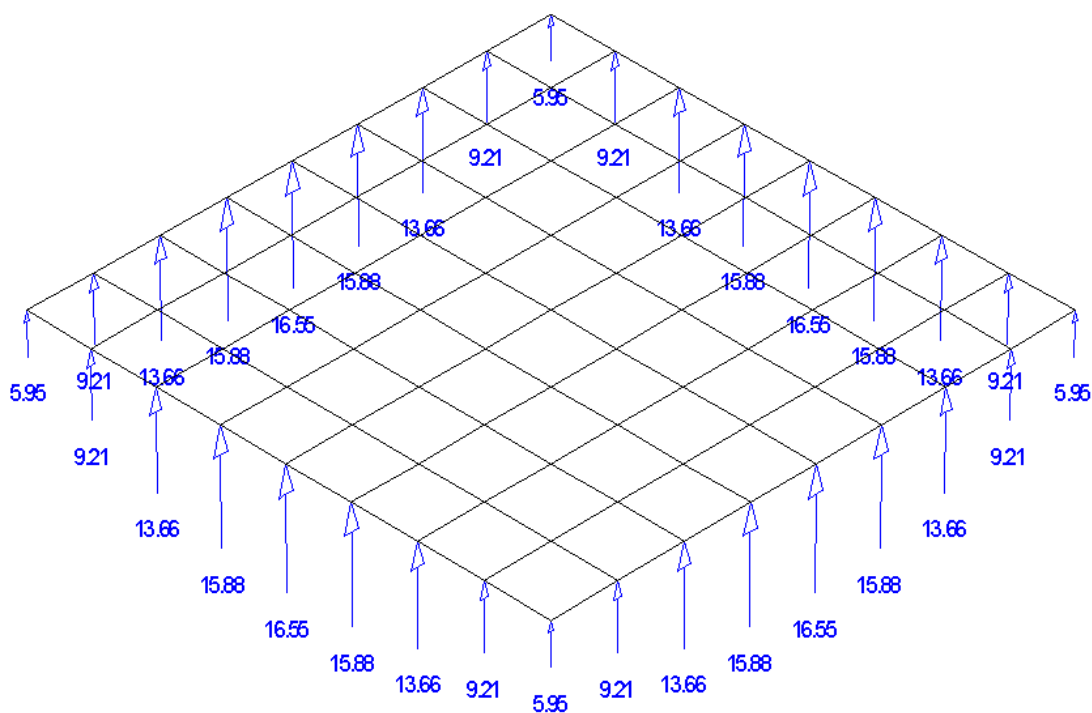


Рис. 3.13.3 Реакции $A_z * 10^6 (t/a = 10^{-4})$

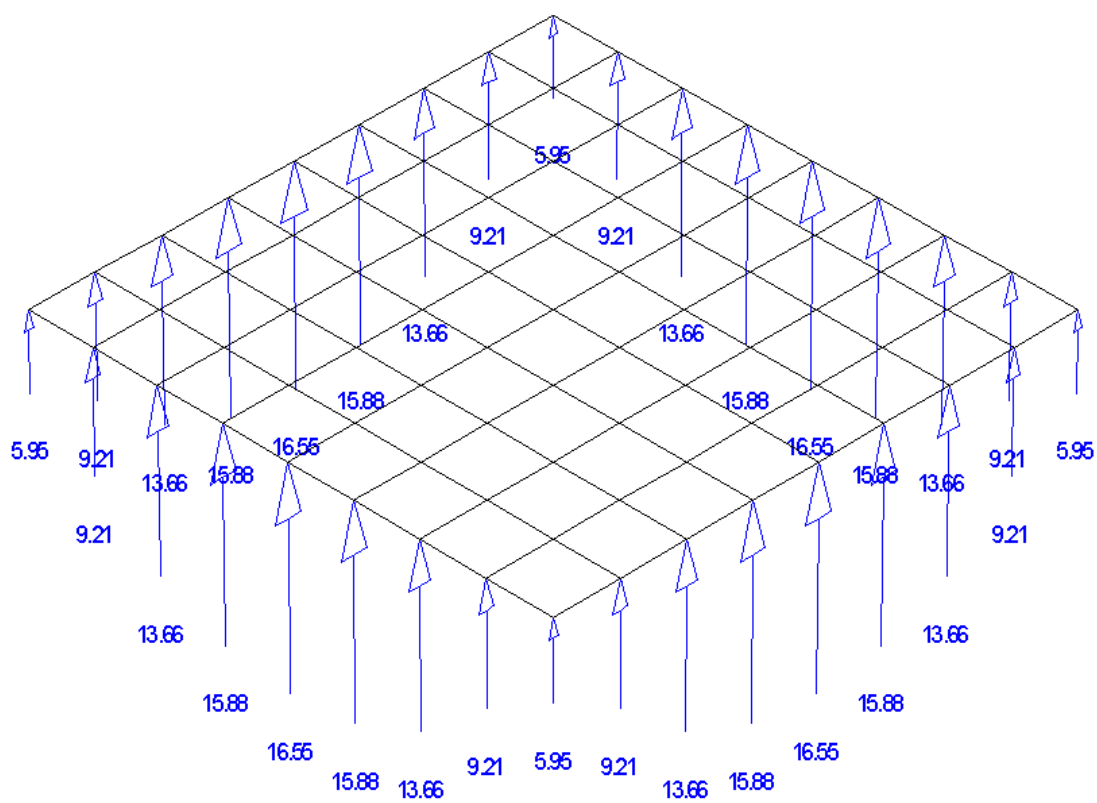


Рис. 3.13.4 Реакции $A_z * 10^6 (t/a = 10^{-7})$

3.14 Проверка сходимости КЭ изгибаемой плиты для косоугольной области

1. Название задачи. Тесты на сходимость перемещений для косоугольной изгибаемой плиты. Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается защемленная по одному краю косоугольная изгибаемая плита, нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой (рис.3.14.1).

Определяются вертикальные перемещения в т.А и т.В.

3. Исходные данные.

$E = 100 \text{ кПа}$ - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$t = 4 \text{ м}$ - толщина плиты;

$L = 100 \text{ м}$ - габарит плиты;

$\beta = 70^\circ, 50^\circ, 30^\circ$ - угол между сторонами плиты;

$q = 1 \text{ кН/м}^2$ - равномерно распределенная нагрузка по области плиты.

4. Конечноэлементная модель. Рассматриваются расчетные схемы из конечных элементов плоской оболочки размерностью – 4x4, 8x8 и 16x16 (рис.3.14.2). Краевые условия приведены на рис. 3.14.1.

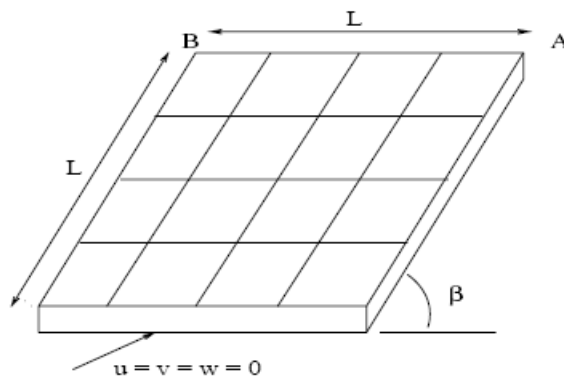


Рис.3.14.1

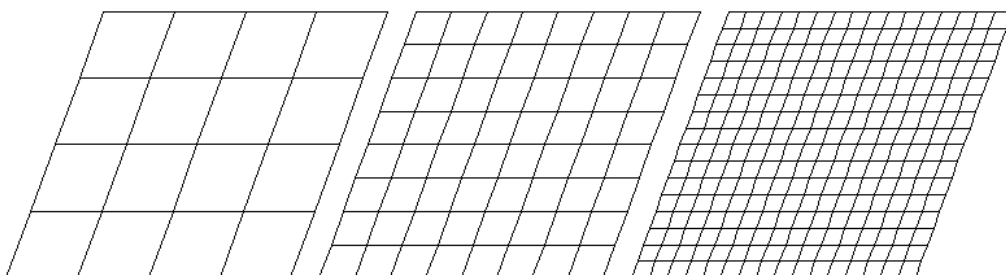


Рис.3.14.2

3.15 Проверка сходимости КЭ изгибаемой плиты для круговой области

1. Название задачи. Тест на сходимость перемещений для круговой изгибаемой плиты.
Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается шарнирно опертая и защемленная по контуру круговая изгибаемая плита, нагруженная сосредоточенной в центре и равномерно-распределенной нагрузкой (рис.3.15.1). Определяются вертикальные перемещения в центре плиты.

3. Исходные данные.

- | | |
|---------------------------|--|
| $E = 10920$ кПа | - модуль упругости, |
| $\mu = 0.3$ | - коэффициент Пуассона, |
| $t = 0.01$ м | - толщина плиты; |
| $R = 5$ м и 50 м | - радиус плиты; |
| $P = 4$ кН | - сосредоточенная нагрузка в центре плиты (т.С); |
| $q = 1$ кН/м ² | - равномерно распределенная нагрузка по области плиты. |

4. Конечноэлементная модель. Рассматриваются расчетные схемы из конечных элементов плоской оболочки – 3 (модель 1), 12 (модель 2) и 48 (модель 3) КЭ элементов на четверть плиты (рис.3.15.2).

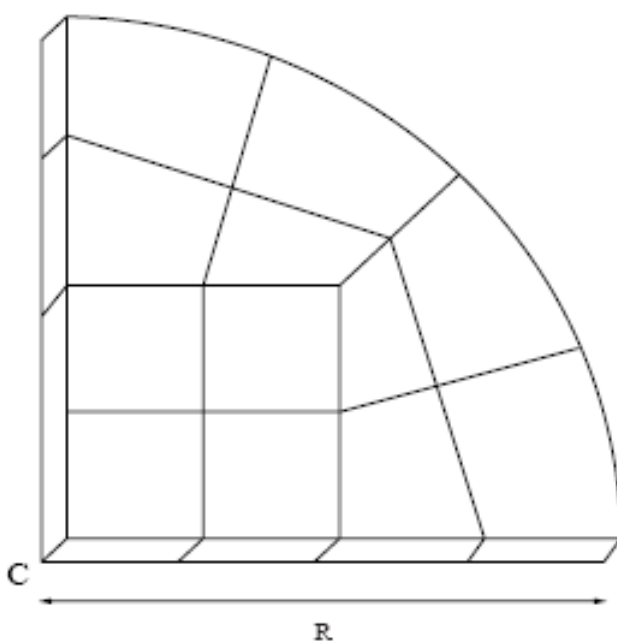


Рис.3.15.1

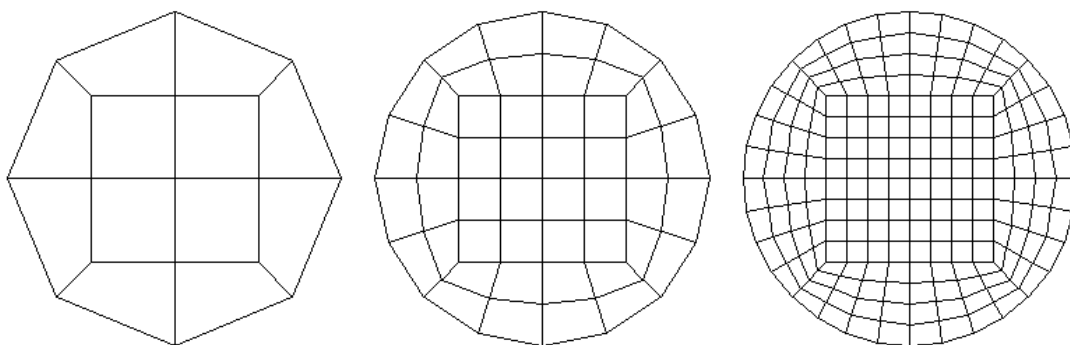


Рис.3.15.2

5. Подобласть верификации. Анализ сходимости перемещений для круговой плиты.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.15.1 - 3.15.2 приводятся значения вертикальных перемещений $w = w_C * 10^{-3}$ в точке С для различных сеток и опораний для случая $R = 5\text{м}$. В табл.3.15.3 - 3.15.4 приводятся значения вертикальных перемещений в точке С для различных сеток и опораний для случая $R = 50\text{м}$ ($w = w_C * 10^{-5}$ для сосредоточенной нагрузки и $w = w_C * 10^{-7}$ для распределенной нагрузки). Там же приведены нормированные вертикальные перемещения $\bar{w} = w / w^{\text{эталон}}$. Как видно из таблиц для конечных элементов используемых в MicroFe наблюдается замечательная точность даже на грубых сетках и сходимость как по сгущению сетки, так и по соотношению t/R .

Таблица 3.15.1 (шарнирное опирание, $R=5\text{м}$)

	Сосредоточенная нагрузка			Распределенная нагрузка		
	модель 1	модель 2	модель 3	модель 1	модель 2	модель 3
w	5.035	5.030	5.043	40.692	40.047	39.874
\bar{w}	0.997	0.996	0.999	1.022	1.005	1.001
Эталон	5.050	5.050	5.050	39.832	39.832	39.832

Таблица 3.15.2 (защемление, $R=5\text{м}$)

	Сосредоточенная нагрузка			Распределенная нагрузка		
	модель 1	модель 2	модель 3	модель 1	модель 2	модель 3
w	1.634	1,890	1.963	7.574	9.227	9.633
\bar{w}	0.822	0.950	0.987	0.774	0.943	0.984
Эталон	1.989	1.989	1.989	9.787	9.787	9.787

Таблица 3.15.3 (шарнирное опирание, R=50м)

	Сосредоточенная нагрузка			Распределенная нагрузка		
	модель 1	модель 2	модель 3	модель 1	модель 2	модель 3
w	5.035	5.030	5.043	40.692	40.047	39.874
\bar{w}	0.997	0.996	0.999	1.022	1.005	1.001
Эталон	5.050	5.050	5.050	39.832	39.832	39.832

Таблица 3.15.4 (защемление, R=50м)

	Сосредоточенная нагрузка			Распределенная нагрузка		
	модель 1	модель 2	модель 3	модель 1	модель 2	модель 3
w	1.634	1.889	1.963	7.573	9.227	9.633
\bar{w}	0.822	0.950	0.987	0.774	0.943	0.984
Эталон	1.989	1.989	1.989	9.787	9.787	9.787

3.16 Проверка наличия у матрицы жесткости мод с нулевой энергией (соосно нагруженная плита)

1. Название задачи. Тест на наличие мод с нулевой энергией для элемента плоской оболочки. Источник [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается заземленная по левому торцу прямоугольная плита, нагруженная сосредоточенной силой соосно приложенной к правому торцу плиты (рис.3.16.1). Определяются горизонтальные перемещения в т.С и напряжения в плите.

3. Исходные данные.

- $E = 1.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости,
 $\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона,
 $t = 0.1$ м - толщина плиты;
 $a = 2$ м - ширина плиты;
 $b = 6$ м - длина плиты;
 $P = 1$ кН - сосредоточенная нагрузка на правый торец плиты.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается расчетная схема из 12-ти конечных элементов плоской оболочки (рис.3.16.1).

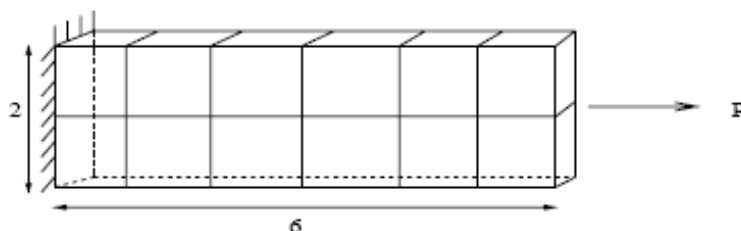


Рис.3.16.1

5. Подобласть верификации. Тест на наличие мод с нулевой энергией.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.16.1. приводятся значения горизонтальных перемещений $w = w_C \cdot 10^6$ в точке С и напряжения σ_{xx} при $x=3$. Как видно из таблицы для конечных элементов используемых в MicroFe наблюдается хорошая точность даже на грубой сетке, которая иллюстрирует отсутствие ложных мод матрицы жесткости.

Таблица 3.16.1

	$w = w_C * 10^6$	σ_{xx}
MicroFe	3.61	4.965 – 5.072
Эталон (PN6X1)	3.31	4.751
LAG9	4.161	4.917 – 5.038
9-node V-P	4.134	4.917 – 5.038

3.17 Проверка наличия у матрицы жесткости мод с нулевой энергией (плита опертая в угловых точках)

1. Название задачи. Тест на наличие мод с нулевой энергией для элемента плоской оболочки. Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается опертая в угловых точках квадратная плита, нагруженная равномерно-распределенной поперечной нагрузкой (рис.3.17.1). Определяются вертикальные перемещения в центре плиты (т.В).

3. Исходные данные.

$E = 1.0 \cdot 10^4$ кПа - модуль упругости,

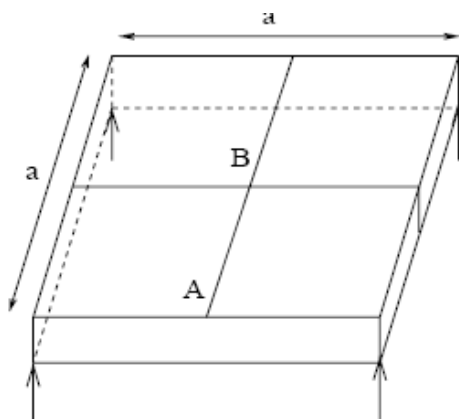
$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$t = 1$ м - толщина плиты;

$a = b = 10$ м и 100 м - ширина и длина плиты;

$q = 1$ кН/м² - равномерно распределенная нагрузка по области плиты.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается расчетная схема из 256-ти конечных элементов плоской оболочки (сетка 16x16).



$$u = v = w = 0 \text{ at corners}$$

Рис.3.17.1

5. Подобласть верификации. Тест на наличие мод с нулевой энергией.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.17.1. приводятся значения вертикальных перемещений $w = w_C \cdot 10^9$ в точке В. Как видно из таблицы для конечных элементов используемых в MicroFe наблюдается хорошая точность, которая иллюстрирует отсутствие ложных мод матрицы жесткости.

Таблица 3.17.1

	$a/t = 10$	$a/t = 1000$
MicroFe	3.07	$2.80 \cdot 10^8$
Эталон	2.53	

3.18 Цилиндрическая панель под действием собственного веса (крыша Scordelis-Lo)

1. Название задачи. Цилиндрическая панель под действием собственного веса. Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается цилиндрическая панель, шарнирно-опертая по торцевым (криволинейным) границам и свободными прямолинейными гранями, нагруженная собственным весом (рис.3.18.1). Определяются вертикальные перемещения в середине прямолинейной грани (т.А).

3. Исходные данные.

- $E = 4.32 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,
- $\mu = 0.01$ - коэффициент Пуассона,
- $t = 0.25$ м - толщина панели;
- $R = 25$ м - радиус панели;
- $L = 50$ м - длина панели;
- $\rho = 0.0367347$ т/м³ - плотность панели;
- $\theta = 40^\circ$ - угол раствора.

4. Конечноэлементная модель. Рассматриваются расчетные схемы из 8-ти и 64-х конечных элементов плоской оболочки для четверти панели (сетки 4x4 и 8x8).

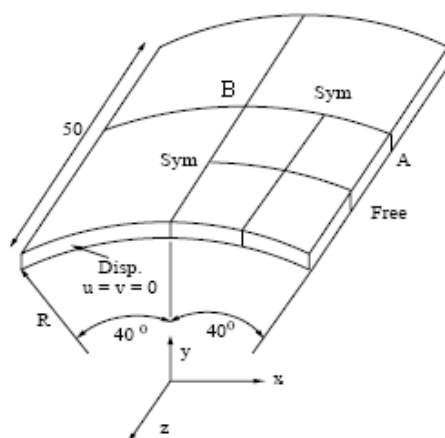


Рис.3.18.1

5. Подобласть верификации. Тест на точность и сходимость КЭ плоской оболочки для изогнутых поверхностей.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.18.1. приводятся значения вертикальных перемещений в точке А (w_A). Там же приведены и

нормированные значения вертикальных перемещений $\hat{w} = w_A / w_A^{\text{эталон}}$. Как видно из таблицы для конечных элементов используемых в MicroFe наблюдается прекрасная точность и сходимость результатов расчета.

Таблица 3.18.1

	w_A	\hat{w}
4x4	0.3148	1.020
8x8	0.3090	1.001
Эталон	0.3086	1.000

3.19 Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (торцы оперты на диафрагму)

1. Название задачи. Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (торцы оперты на диафрагму).

Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (торцы оперты на диафрагму) (рис.3.19.1). Определяется перемещение в точке под силой.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^6$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$t = 3$ м	- толщина оболочки;
$R = 300$ м	- радиус оболочки;
$L = 600$ м	- длина оболочки;
$P = 4$ кН	- сосредоточенная нагрузка.

4. Конечноэлементная модель. Рассматриваются расчетные схемы 4x4, 8x8, 16x16 и 32x32 для одной восьмой части оболочки.

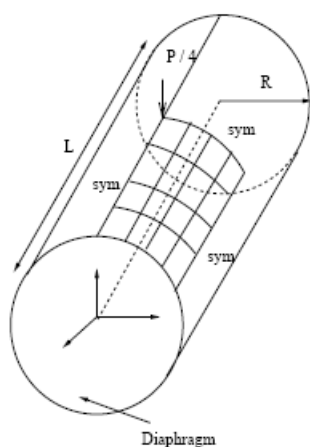


Рис.3.19.1

5. Подобласть верификации. Тест на точность и сходимость КЭ плоской оболочки для изогнутых поверхностей.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.19.1 приводятся значения перемещений в точке по силе ($w \cdot 10^5$) для различных сеток. Там же

приведены и нормированные значения вертикальных перемещений $\bar{w} = w / w^{\text{эталон}}$. Как видно из таблицы для конечных элементов используемых в MicroFe наблюдается хорошая сходимость результатов расчета.

Таблица 3.19.1

	$w * 10^5$	\bar{w}
4x4	0.97346	0.533
8x8	1.54190	0.845
16x16	1.75351	0.961
32x32	1.81859	0.997
Эталон	1.82488	1.000

3.20 Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (торцы свободны)

1. Название задачи. Замкнутая круговая цилиндрическая оболочка под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (торцы свободны). Источник [Кантин Д. Смещения криволинейных конечных элементов как жесткого целого// Ракетная техника и космонавтика.- 1970.- Т.8, 7.-с.84-88].

2. Формулировка задачи. Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (торцы свободны) (рис.3.20.1). Определяется перемещение в точке под силой для двух вариантов значений толщины и нагрузки.

3. Исходные данные.

$E = 7.4 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.3125$	- коэффициент Пуассона,
$R = 12.5$ см	- радиус оболочки;
$L = 26.2$ см	- длина оболочки;
1-й вариант	
$t = 0.238$ см	- толщина оболочки;
$P = 0.453$ кН	- сосредоточенная нагрузка;
2-й вариант	
$t = 0.0393$ см	- толщина оболочки;
$P = 0.000453$ кН	- сосредоточенная нагрузка.

4. Конечноэлементная модель. Рассматриваются расчетные схемы 5x10 и 10x20 для одной восьмой части оболочки.

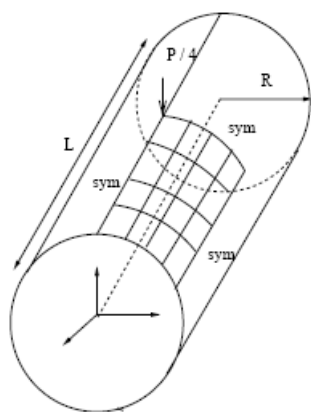


Рис.3.20.1

5. Подобласть верификации. Тест на точность и сходимость КЭ плоской оболочки для изогнутых поверхностей.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.20.1. приводятся значения перемещений в точке по силовой (w) для различных сеток. Там же приведены и нормированные значения вертикальных перемещений $\bar{w} = w / w^{\text{эталон}}$. Как видно из таблицы для конечных элементов используемых в MicroFe наблюдается хорошая сходимость результатов расчета.

Таблица 3.20.1

	1-й вариант (R/t=52.5)		2-й вариант (R/t=318.1)	
	w , см	\bar{w}	w , см	\bar{w}
5x10	0.283	0.979	0.0607	0.971
10x20	0.285	0.986	0.0612	0.979
Эталон	0.289	1.000	0.0625	1.000

3.21 Пространственная Z-образная пластинчатая конструкция

1. Название задачи. Пространственная Z-образная пластинчатая конструкция работающая на кручение и изгиб. Источник [K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.].

2. Формулировка задачи. Рассматривается пространственная Z-образная пластинчатая конструкция работающая на кручение и изгиб, состоящая из трех пластинок и защемленная по правому торцу (рис.3.21.1). Определяются напряжения σ_{xx} в точках А и В.

3. Исходные данные.

$E = 2.1 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$t = 0.1$ м - толщина пластин;

$a = 1$ м - ширина вертикальных пластин;

$b = 2$ м - ширина горизонтальной пластины;

$L = 10$ м - длина конструкции;

$p = 600$ кН/м² - вертикальная распределенная нагрузка по правым краям вертикальных пластин.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается расчетная схема состоящая из 24-х конечных элементов плоской оболочки и 36 узлов.

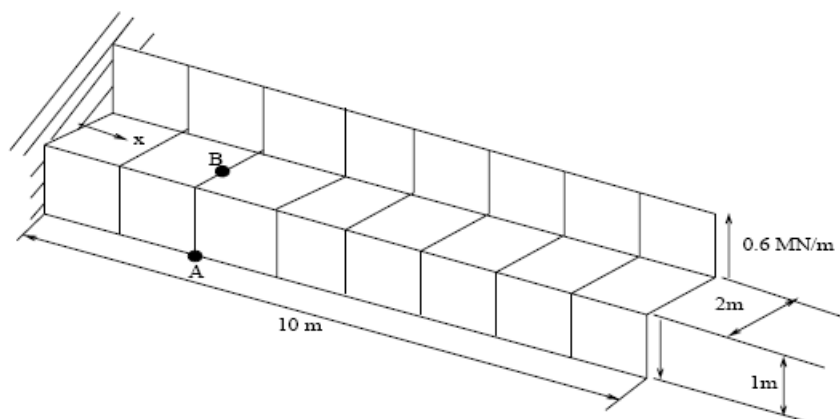


Рис.3.21.1

5. Подобласть верификации. Тест на точность КЭ плоской оболочки для пространственных пластинчатых систем.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.21.1. приводятся значения напряжений σ_{xx} в точках А и В. Там же приведены и нормированные значения напряжений $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} / \sigma_{xx}^{\text{эталон}}$. Значения напряжения в т.В получено линейным

интерполированием напряжений в соседних точках. Как видно из таблицы для конечных элементов используемых в MicroFe наблюдается хорошая точность результатов расчета напряжений.

Таблица 3.21.1

	σ^A_{xx} , МПа	$\bar{\sigma}^A_{xx}$	σ^B_{xx} , МПа	$\bar{\sigma}^B_{xx}$
MicroFe	114.7	1.063	37.4	1.039
Эталон	108	1.000	36	1.000

3.22 Замкнутая сферическая оболочка

1. Название задачи. Замкнутая сферическая оболочка под действием двух самоуравновешенных сил. Источник [Lee S.W., Wong S.C., Rhin J.J. Study of nine-node mixed formulation finite element for thin plates and shells// Computers and Structures.- 1985.-V.21, N6.- P.1325-1334].

2. Формулировка задачи. Рассматривается замкнутая сферическая оболочка под действием двух самоуравновешенных сил. (рис.3.22.1). Определяется прогиб под силой.

3. Исходные данные.

$E = 7.03 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости,

$\mu = 0.0$ - коэффициент Пуассона,

$t = 0.000254$ м - толщина оболочки;

$R = 0.254$ м - радиус оболочки;

$P = 0.01816$ кН - сосредоточенная нагрузка в двух противоположных полюсах.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривается расчетная схема состоящая из 200-х конечных элементов плоской оболочки для одной восьмой части сферы (10 элементов по окружности и 20 элементов по образующей – сетка 10x20).

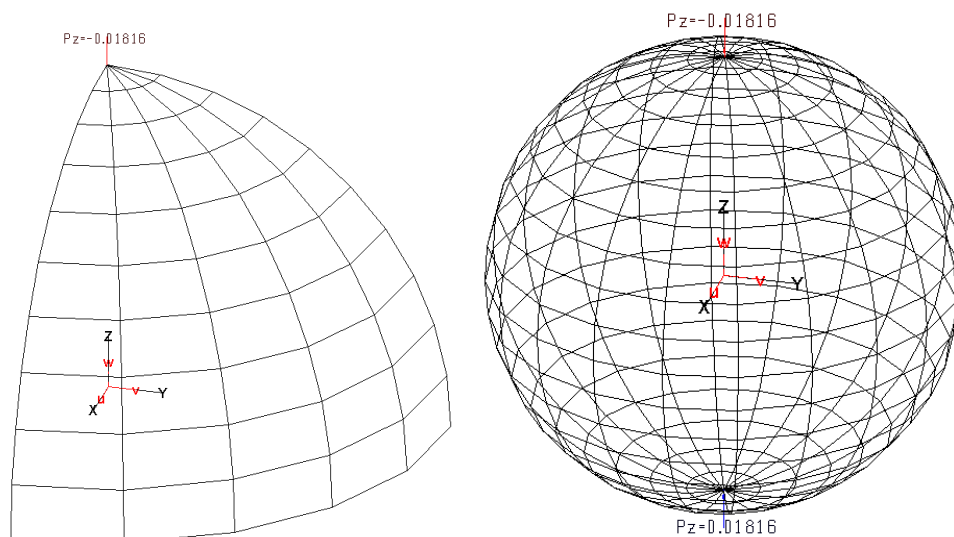


Рис.3.22.1

5. Подобласть верификации. Тест на точность КЭ плоской оболочки для пространственных систем.

6. Численное решение по MicroFe и сравнение с эталонным решением. В табл.3.22.1. приводится значение перемещения точки под силой. Там же приведено и нормированное

значения перемещения $\hat{w} = w / w^{\text{эталон}}$. Как видно из таблицы для конечных элементов используемых в MicroFe наблюдается хорошая точность результатов расчета перемещения.

Таблица 3.22.1

	$w, \text{ м}$	\hat{w}
MicroFe	0.000108	1.029
Эталон	0.000105	1.000

3.23 Действие сосредоточенной силы на плоскую границу полупространства (задача Буссинеска)

1. Название задачи. Действие сосредоточенной силы на плоскую границу полупространства (задача Буссинеска) [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.]

2. Формулировка задачи. К упругому изотропному телу, ограниченному плоскостью $y=0$, приложена в начале координат сосредоточенная сила P , направленная вдоль оси y (рис.3.23.1). Определить вертикальные перемещения в точках А, В, С и D, горизонтальные перемещения в точках G, H и I, а также напряжения σ_{33} в точках В, С, D и E.

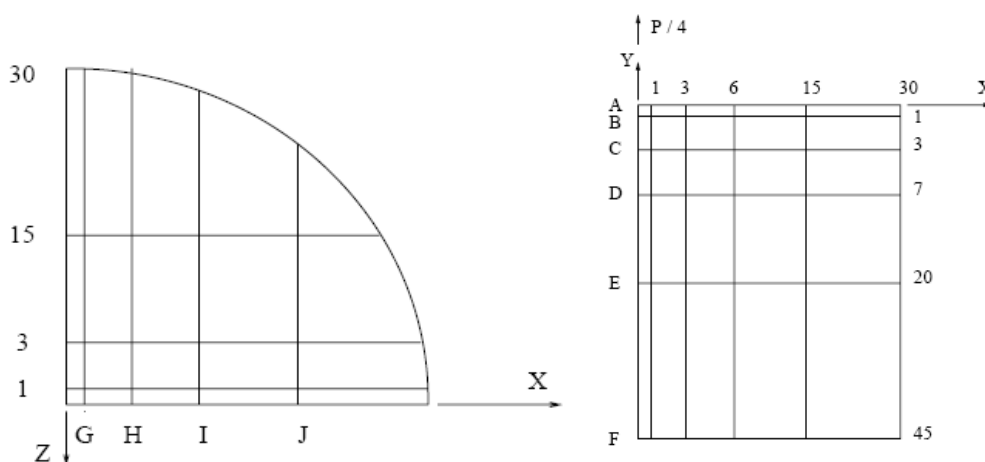


Рисунок 3.23.1

3. Исходные данные.

- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| $E = 1.0 \cdot 10^7$ кПа | - модуль упругости, |
| $\mu = 0.3$ | - коэффициент Пуассона, |
| $R = 30$ м | - радиус границы объема в плане; |
| $H = 45$ м | - глубина объема; |
| $P = 1.0 \cdot 10^4$ кН | - сосредоточенная сила в центре; |

4. Конечно-элементная модель. Рассматривалось две расчетных схемы. 1-я расчетная схема представляющая цилиндрический массив радиусом 30 м и глубиной 45 м, состоящая из 400 объемных конечных элементов и 570 узлов, взята в соответствии с [К.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.] и представлена на рис. 3.23.2. 2-я расчетная схема также состоящая из объемных элементов и представляющая прямоугольный массив размером 60х60х45м, сгенерирована с шагом 1х1х1м.

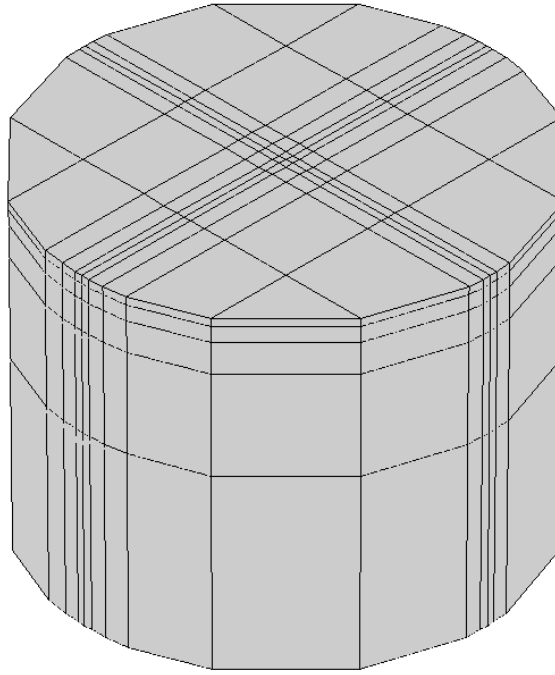


Рисунок 3.23.2

5. Аналитическое решение. Решение задачи Буссинеска взято из [Демидов С.П. Теория упругости, М., Высшая школа, 1979.]. Перемещения произвольной точки тела

$$u_x = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{-yx}{r^3} - (1-2\mu) \frac{x}{r(r-y)} \right],$$

$$u_z = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{-zy}{r^3} - (1-2\mu) \frac{z}{r(r-y)} \right],$$

$$u_y = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(1-\mu)}{r} + \frac{y^2}{r^3} \right]$$

Напряжения в теле определяются по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{-y}{r^3} (1-2\mu-3\frac{x^2}{r^2}) - (1-2\mu) \left[\frac{z^2+y^2}{r^3(r-y)} - \frac{x^2}{r^2(r-y)^2} \right] \right\},$$

$$\sigma_{22} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{-y}{r^3} (1-2\mu-3\frac{z^2}{r^2}) - (1-2\mu) \left[\frac{z^2+y^2}{r^3(r-y)} - \frac{z^2}{r^2(r-y)^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{33} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{(-y)^3}{r^5}, \quad \sigma_{12} = \frac{P}{2\pi} \left[(1-2\mu) \frac{xz(2r-y)}{r^3(r-y)^2} + 3\frac{xyz}{r^5} \right],$$

$$\sigma_{23} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{zy^2}{r^5}, \quad \sigma_{31} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{xy^2}{r^5}$$

Перемещения произвольной точки K на граничной плоскости $y=0$ определяются формулами

$$u_r = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E} \frac{P}{2\pi r}, \quad u_y = \frac{P(1-\mu^2)}{\pi E r}$$

б. Сопоставление результатов. В таблице 3.23.1 представлено сравнение результатов расчета вертикальных перемещений $\bar{w} = w * 10^5$ в точках А, В, С, D, G, H и I по программе с эталонным решением. В таблице 3.23.2 представлено сравнение результатов расчета напряжений σ_{33} в точках А, В, С, D и E по программе с эталонным решением.

Таблица 3.23.1

	А	В	С	D	G	H	I
Схема 1	171.125	40.477	8.973	5.972	8.366	9.173	2.991
Схема 2	182.400	38.989	15.291	6.045	4.025	7.553	3.857
Эталон	∞	49.656	16.552	7.094	28.966	9.655	4.828

Таблица 3.23.2

	А	В	С	D	E
Схема 1	14372	7903.77	759.45	59.29	19.74
Схема 2	15597	8607.86	483.13	97.25	12.19
Эталон	∞	4774.65	530.52	97.44	11.94

4 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (ЛИНЕЙНАЯ СТАТИКА)

4.1 Консольная балка под сосредоточенной нагрузкой

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние консольной балки под сосредоточенной силой (рисунок 4.1.1).

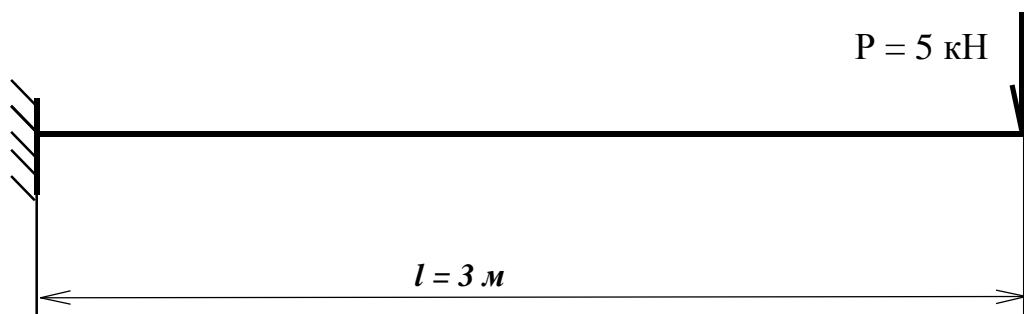


Рисунок 4.1.1

2. Формулировка задачи. Консольная балка нагружается сосредоточенной силой P . Определить перемещения w , углы поворота θ и изгибающий момент $M_{\text{изг}}$.

3. Исходные данные.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ | - модуль упругости, |
| $\mu = 0.3$ | - коэффициент Пуассона, |
| $l = 3 \text{ м}$ | - длина балки; |
| $J = 244.0 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ | - момент инерции поперечного сечения; |
| $P = 5 \text{ кН}$ | - значение сосредоточенной силы. |

4. Конечноэлементная модель При расчетах балка разбивалась на 10 элементов 3D-балок.

5. Подобласть верификации. Изгиб в плоскости под сосредоточенной силой, без учета деформаций поперечного сдвига. Проверились значения моментов и перемещений при приложении силы в различных направлениях перпендикулярных оси балки.

6. Аналитическое решение. Максимальные перемещения возникают на свободном конце и определяется по формулам [Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наук. думка, 1988.]:

$$w_{\text{max}} = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J} \quad \theta = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot J}$$

На рисунках 4.1.2 – 4.1.3 показаны линия прогиба и эпюра изгибающего момента. Сравнение численных результатов с аналитическим представлено в таблице 4.1.1. Значение перемещений и моментов было одинаковым при различных направлениях приложения силы.

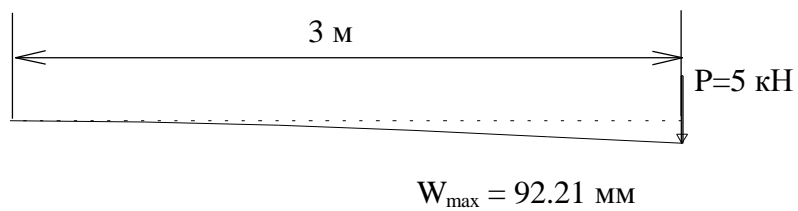


Рисунок 4.1.2



Рисунок 4.1.3

Таблица 4.1.1

Параметр	Теория	MicroFe
Максимальный прогиб, мм	-92.21	-92.21
Максимальный изгибающий момент, Н·м	15	15
Максимальный угол поворота, рад	-0.04611	-0.04611

4.2 Консольная балка под действием сосредоточенной силы с учетом влияния сдвига

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние консольной балки под действием сосредоточенной силы с учетом влияния сдвига (рисунок 4.2.1).

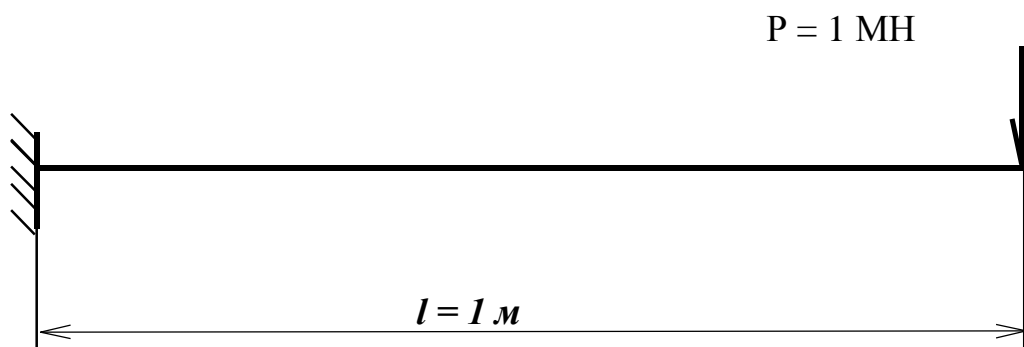


Рисунок 4.2.1

2. Формулировка задачи. Консольная балка прямоугольного сечения нагружается сосредоточенной силой P . Определить перемещения w и изгибающий момент $M_{\text{изг}}$ в балке с учетом влияния поперечного сдвига.

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$l = 1$ м	- длина балки;
$b = 0.1$ м	- ширина балки;
$h = 1$ м	- высота поперечного сечения балки;
$F = 0.1$ м ²	- площадь поперечного сечения;
$J = 8.333 \cdot 10^{-3}$ м ⁴	- момент инерции поперечного сечения;
$\lambda = 0.78$	- коэффициент сдвига;
$P = 1$ МН	- значение сосредоточенной силы.

4. Конечноэлементная модель. При расчете балка разбивалась на 10 элементов 2D-балок.

5. Подобласть верификации. Изгиб балки в плоскости под действием сосредоточенной силы с учетом деформаций поперечного сдвига.

6. Аналитическое решение. Максимальное перемещение возникает на свободном конце балки и определяется по формуле [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968]:

$$w_{\text{max}} = -\frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z} (1 + \lambda)$$

На рисунке 4.2.2 показаны линия прогиба и эпюра изгибающего момента. Сравнение численных результатов с аналитическими представлено в таблице 4.2.1

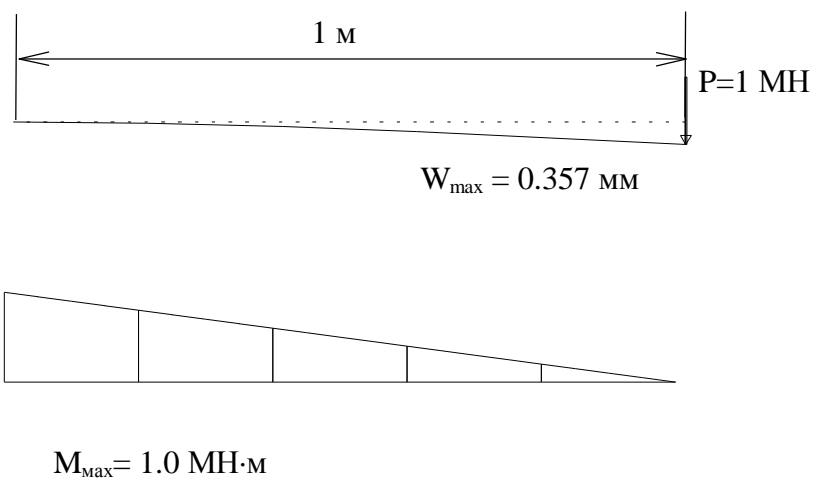


Рисунок 4.2.2

Таблица 4.2.1

Параметр	Теория	MicroFe
Максимальный прогиб, мм	-0.356	-0.357
Максимальный изгибающий момент, МН·м	1.0	1.0

4.3 Расчет балочной конструкции

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние шарнирно опертой балки, нагруженной сосредоточенной силой и равномерно-распределенным давлением (рис. 4.3.1).

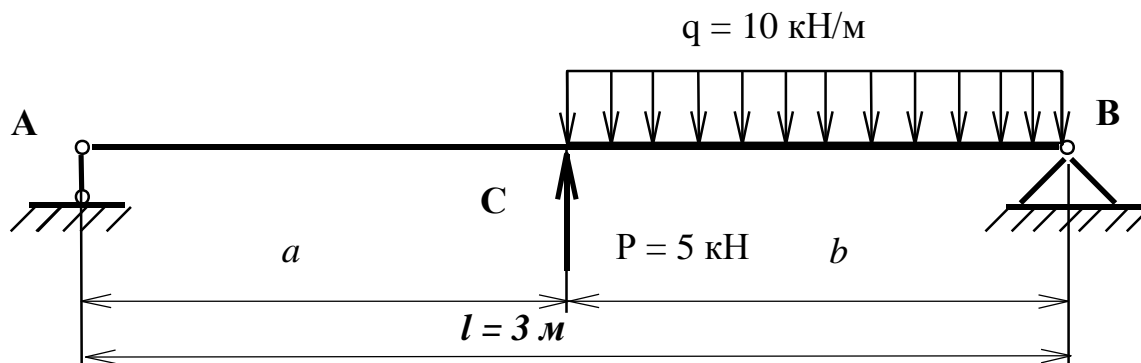


Рис. 4.3.1

2. Формулировка задачи. Балка нагружается сосредоточенной силой P и равномерно распределенным давлением q . Определить перемещения w , углы поворота θ , поперечные силы Q_y и изгибающие моменты $M_{изг}$.

3. Исходные данные.

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$l = 3$ м	- длина балки;
$F = 14.2e-4$ м ²	- площадь поперечного сечения;
$J_z = 244.0e-8$ м ⁴	- момент инерции относительно оси z ;
$P = 5$ кН	- значение сосредоточенной силы.
$q = -10$ кН/м	- значение давления;
$a = 1.5$ м	- геометрический размер;
$b = 1.5$ м	- геометрический размер.

4. Конечноэлементная модель. При расчетах балка разбивалась на 10 элементов типа 2D-балок.

5. Подобласть верификации. Комбинированное нагружение (поперечное давление, сосредоточенная сила) в одной плоскости без учета деформаций поперечного сдвига.

6. Аналитическое решение. Прогиб в центре балки может быть вычислен по следующей формуле:

$$w = w_q + w_p$$

где

$$w_p = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J_z}$$

$$w_q = \frac{q \cdot a^3 \cdot l}{24 \cdot E \cdot J_z} \left[4 \left(1 - \frac{a}{2 \cdot l} \right)^2 \cdot \frac{z}{a} - 4 \frac{(a/2 + b)z^3}{a^2 l^2} + \frac{z^4}{a^3 l} \right] \quad \text{-прогибы в центре балки от}$$

сосредоточенной силы и давления соответственно.

Угол поворота в точке В вычисляется по следующей формуле:

$$\theta = \theta_p + \theta_q ,$$

где $\theta_p = -\frac{P l^2}{16 E J_z}$, $\theta_q = -\frac{q a^2 l}{6 E J_z} \left(1 - \frac{a}{2l} \right)^2$ - углы поворотов от поперечной силы и

давления соответственно.

7. Точность решения. В таблице 4.3.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением [Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наук. думка, 1988.].

Таблица 4.3.1

Параметр	Теория	MicroFe
Прогиб в точке С, мм	-5.042	-5.04
Изгибающий момент в точке С, кН·м	1.875	1.88
Поперечная сила Q _y , кН		
Точка А	1.25	1.25
Точка В	8.75	8.75
Угол поворота в точке В, рад	7.204·10 ⁻³	7.2·10 ⁻³

На рисунке 4.3.2 показаны линия прогиба и эпюра изгибающего момента и поперечной силы.

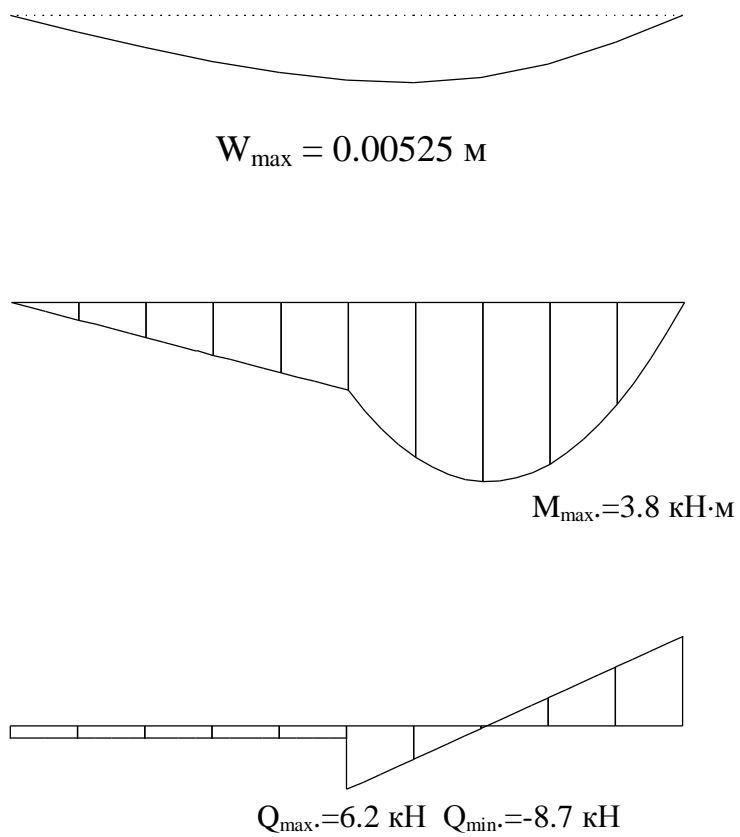


Рисунок 4.3.2

4.4 Защемленная по концам балка, нагруженная равномерно-распределенным давлением

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние защемленной по концам балки под равномерно-распределенным давлением (рисунок 4.4.1).

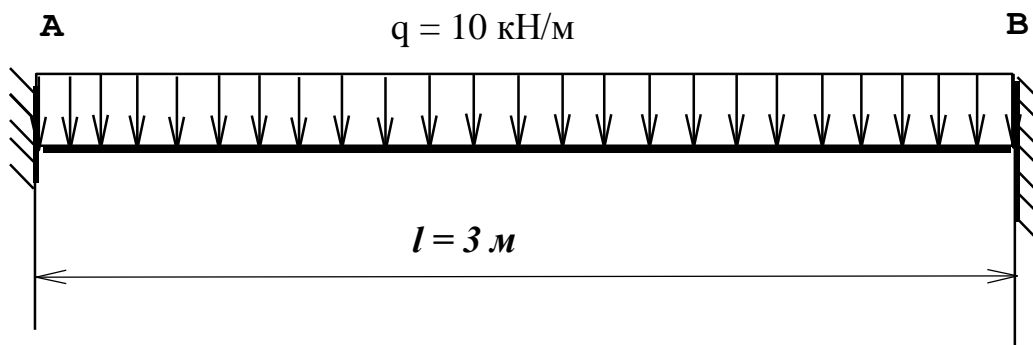


Рисунок 4.4.1

2. Формулировка задачи. Балка нагружается равномерно распределенным давлением q . Определить перемещения w , поперечные силы Q_y и изгибающие моменты $M_{изг}$.

3. Исходные данные.

- $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,
- $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
- $l = 3$ м - длина балки;
- $F = 14.2e-4$ м² - площадь поперечного сечения;
- $J = 244.0e-8$ м⁴ - момент инерции поперечного сечения;
- $q = -10$ кН/м - значение давления.

4. Конечноэлементная модель. При расчетах балка разбивалась на 10 элементов.

5. Подобласть верификации. Нагружение (поперечное давление) защемленной по концам балки в одной плоскости без учета деформаций поперечного сдвига.

6. Аналитическое решение. Прогиб в центре балки может быть вычислен по следующей формуле:

$$w_q = \frac{q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot J}$$

Максимальные изгибающие моменты вычисляются по следующим формулам:

$$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$$

Изгибающий момент в центре балки

$$M = \frac{ql^2}{24}$$

7. Точность решения. В таблице 4.4.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением [Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наук. думка, 1988.].

Таблица 4.4.1

Параметр	Теория	MicroFe
Максимальный прогиб, мм	-4.32	-4.32
Изгибающий момент , кН·м в центре балки	3.75	3.75
в заделке	-7.5	-7.5

На рисунке 4.4.2 показаны линия прогиба и эпюра изгибающего момента и поперечной силы.

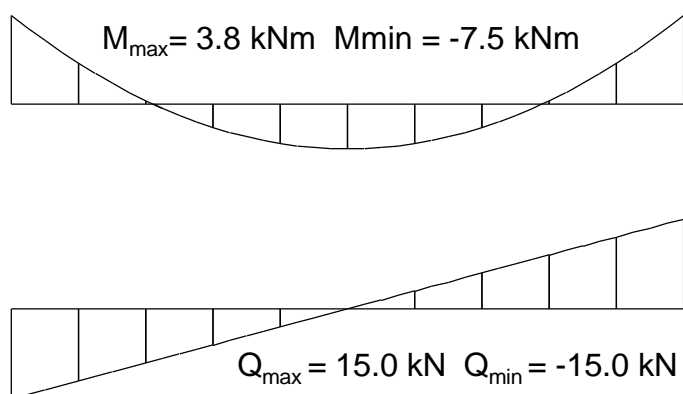


Рисунок 4.4.2

4.5 Трехступенчатая шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенными силами

1. Название задачи. Деформированное состояние трехступенчатой шарнирно опертой балки нагруженной сосредоточенными силами (рисунок 4.5.1).

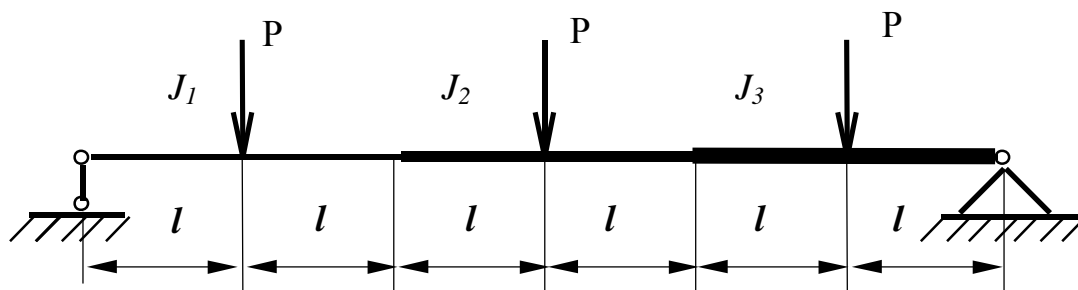


Рисунок 4.5.1

2. Формулировка задачи. Трехступенчатая опертая балка нагружается тремя сосредоточенными силами P . Определить углы поворота опорных сечений и прогибы в местах приложения сил.

3. Исходные данные.

- $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,
 $l = 1$ м - длина половины пролета балки;
 $F_1 = 1 \cdot 10^{-2}$ м² - площадь поперечного сечения;
 $J_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ м⁴ - момент инерции поперечного сечения балки;
 $J_1:J_2:J_3 = 1:2:3$;
 $F_1:F_2:F_3 = 1:2:3$.

4. Конечноэлементная модель. При расчетах балка разбивалась на 6 балочных элементов.

5. Подобласть верификации. Деформированное состояние трехступенчатой шарнирно опертой балки нагруженной сосредоточенными силами без учета деформаций поперечного сдвига.

6. Аналитическое решение. Формулы для определения численных значений перемещений в местах приложения нагрузки и углов поворота опорных сечений балки взяты из [Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наук. думка, 1988.].

7. Точность решения. В таблице 4.5.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением.

Таблица 4.5.1

Параметр	Теория	MicroFe
Угол поворота, рад		
$\varphi(0)$	$3.27 \cdot 10^{-3}$	$3.27 \cdot 10^{-3}$
$\varphi(6l)$	$2.31 \cdot 10^{-3}$	$2.31 \cdot 10^{-3}$
Прогиб, мм		
$W(l)$	3.02	3.02
$W(3l)$	4.4	4.4
$W(5l)$	2.23	2.23

4.6 Разрезанное круговое кольцо, нагруженное в плоскости оси кольца сосредоточенными силами

1. Название задачи. Деформированное состояние разрезанного кругового кольца, нагруженного двумя взаимоперпендикулярными силами P_x и P_y лежащими в плоскости оси кольца (рисунок 4.6.1).

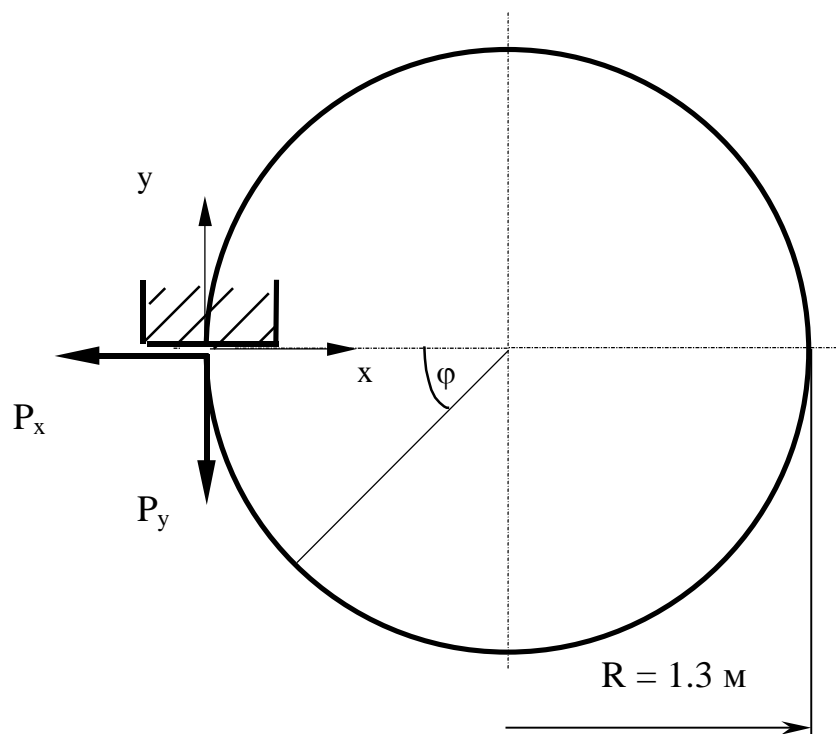


Рисунок 4.6.1

2. Формулировка задачи. Разрезанное круговое кольцо нагружается двумя взаимоперпендикулярными силами P_x и P_y лежащими в плоскости оси кольца. Определить деформированное состояние кольца.

3. Исходные данные.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па | - модуль упругости, |
| $R = 1.3$ м | - радиус кольца, |
| $F = 0.01$ м ² | - площадь поперечного сечения; |
| $J = 5 \cdot 10^{-6}$ м ⁴ | - момент инерции поперечного сечения балки; |
| $P_x = P_y = 1$ кН | - значение сосредоточенной силы. |

4. Конечноеэлементная модель. При расчетах кольцо разбивалось на 120 элементов 2D-балки.

5. Подобласть верификации. Деформированное состояние разрезанного кругового кольца при изгибе в плоскости без учета деформаций поперечного сдвига.

6. Аналитическое решение. Перемещения точек кольца в направлениях осей x и y определяется по формулам [Расчеты на прочность в машиностроении /Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. В трех томах. Том 1. М.:Машгиз, 1956.]

перемещение вдоль оси x

$$u(\varphi) = \frac{P_x \cdot R^3}{EJ} \beta_1(\varphi) + \frac{P_y \cdot R^3}{EJ} \beta_2(\varphi),$$

где

$$\beta_1(\varphi) = -\left(\frac{1}{2}(2\pi - \varphi) + \sin(\varphi) - \frac{1}{2}\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)\right)$$

$$\beta_2(\varphi) = 1 + (2\pi - \varphi) \cdot \sin(\varphi) - \cos(\varphi) + \frac{1}{2}\sin^2(\varphi)$$

перемещение вдоль оси y

$$v(\varphi) = \frac{P_x \cdot R^3}{EJ} \gamma_1(\varphi) + \frac{P_y \cdot R^3}{EJ} \gamma_2(\varphi),$$

где

$$\gamma_1(\varphi) = -\left[1 - \cos(\varphi) - \frac{1}{2}\sin^2(\varphi)\right]$$

$$\gamma_2(\varphi) = -\left[\frac{1}{2}(2\pi - \varphi) + (2\pi - \varphi)\cos(\varphi) + \sin(\varphi) + \frac{1}{2}\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)\right].$$

7. Точность решения. В таблице 4.6.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением.

Таблица 4.6.1

Угол φ , рад	Перемещение вдоль оси x		Перемещение вдоль оси y	
	Теория	MicroFe	Теория	MicroFe
$2 \cdot \pi$	0	0	0	0
$1.5 \cdot \pi$	0.16	0.17	-0.31	-0.31
$1.0 \cdot \pi$	0.47	0.44	-0.47	-0.52
$0.5 \cdot \pi$	3.14	3.04	-4.24	-4.22
0	-3.45	-3.35	-10.35	-10.23

4.7 Кольцо при нагружении в его плоскости распределенной нагрузкой

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние кольца под распределенной нагрузкой (рисунок 4.7.1).

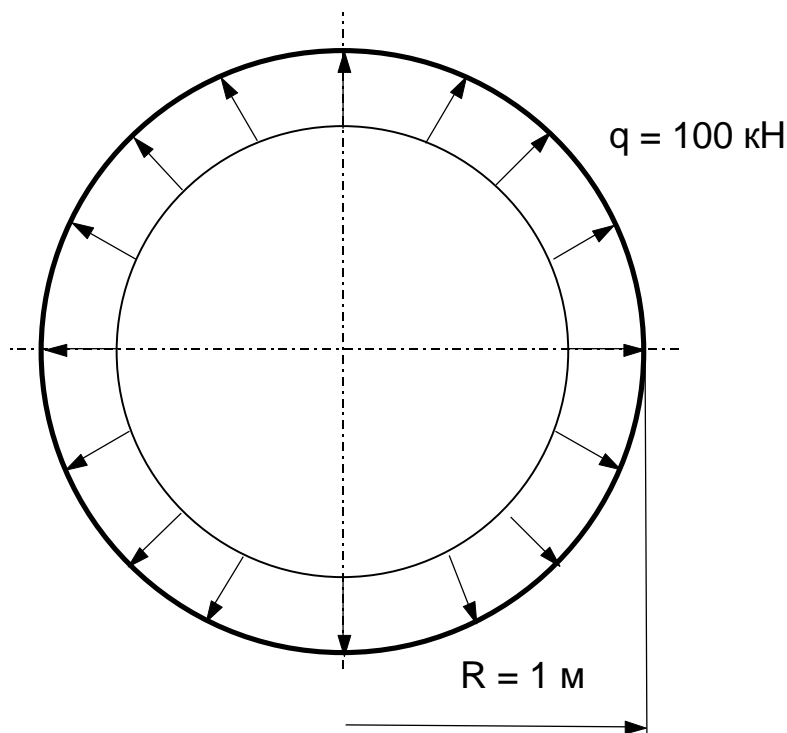


Рисунок 4.7.1

2. Формулировка задачи. Кольцо нагружается в его плоскости распределенной нагрузкой q . Определить: нормальную силу в сечении кольца N и изменения диаметра кольца δ_x, δ_y .

3. Исходные данные.

- $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,
- $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
- $R = 1$ м - радиус кольца,
- $F = 0,001$ м² - площадь поперечного сечения;
- $q = 100$ кН - значение распределенной нагрузки.

4. Конечноэлементная модель. При расчетах кольцо разбивалось на 24 элемента.

5. Подобласть верификации. Изгиб в плоскости под распределенной силой, без учета деформаций поперечного сдвига.

6. Аналитическое решение. Изменения диаметра кольца в направлениях осей x и y определяется по формулам:

$$\delta_x = \delta_y = \frac{qR^2}{EF}.$$

Нормальная сила в сечении кольца

$$N = qR.$$

7. Точность решения. В таблице 4.7.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением [Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наук. думка, 1988.]

Таблица 4.7.1

Параметр	Теория	MicroFe
Изменение диаметра кольца, мм	0.5	0.5
Нормальная сила N в сечении кольца, кН	100	99.1

На рисунке 4.7.2 показаны линия прогиба и эпюра нормальной силы в сечении кольца.

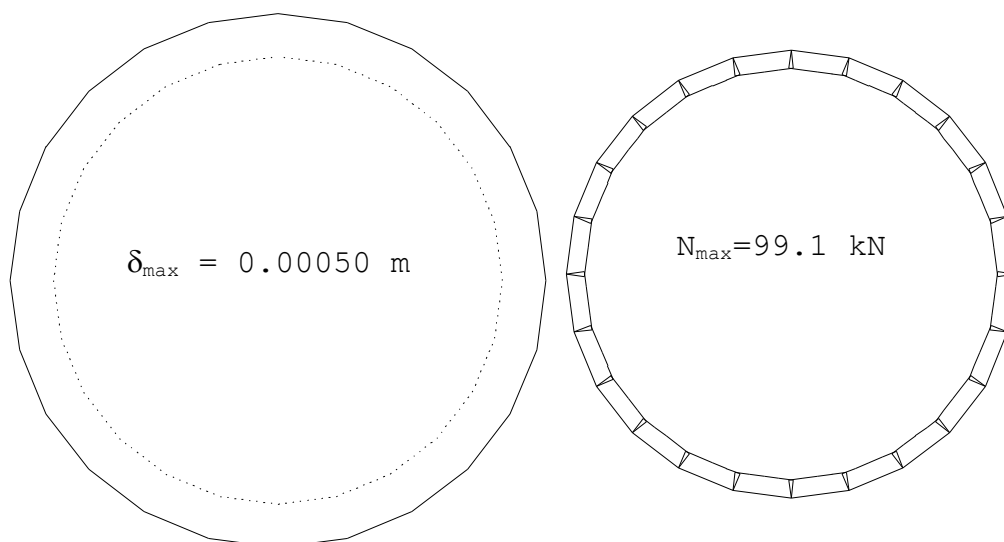


Рисунок 4.7.2

4.8 Продольно-поперечный изгиб балки

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние шарнирно опертой балки, нагруженной продольными и поперечной сосредоточенными нагрузками (рисунок 4.8.1).

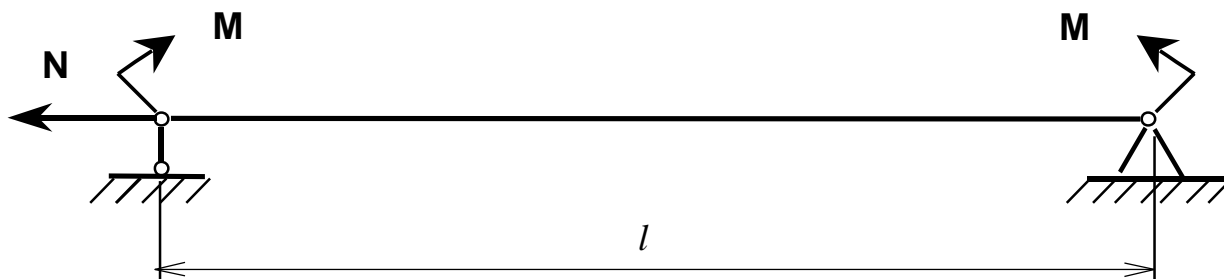


Рисунок 4.8.1

2. Формулировка задачи. Двухопорная балка, находящаяся в условиях чистого изгиба, дополнительно нагружается продольной силой N . Определить перемещения w и изгибающие моменты $M_{\text{изг}}$ при сжимающей и растягивающей продольной нагрузке.

3. Исходные данные.

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости;
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$F = 0.01$ м ²	- площадь поперечного сечения;
$J_z = 8.333e-6$ м ⁴	- момент инерции относительно оси z ;
$M = 10$ кН·м	- значение изгибающего момента;
$N = \pm 200$ кН	- значение сосредоточенной продольной силы;
$l = 1$ м	- длина балки.

4. Конечноэлементная модель. При расчетах балка разбивалась на 16 элементов типа 2D-балок.

5. Подобласть верификации. Продольно-поперечный изгиб в одной плоскости.

6. Аналитическое решение.

Уравнение упругой линии и уравнение изгибающего момента при совместном действии изгибающего момента и продольной сжимающей силы имеют вид [Расчеты на прочность в машиностроении /Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. В трех томах. Том 1. М.:Машгиз, 1956]:

$$w(a) = \frac{M}{N} \left[\frac{1 - \cos(kl)}{\sin(kl)} \sin(kx) + \cos(kx) - 1 \right]$$

$$M(x) = M \cdot \left[\frac{1 - \cos(kl)}{\sin(kl)} \cdot \sin(kx) + \cos(kx) \right], \text{ где } k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}.$$

Уравнение упругой линии и уравнение изгибающего момента при совместном действии изгибающего момента и продольной растягивающей силы имеют вид:

$$w(x) = \frac{M}{N} \left[\frac{ch(kl) - 1}{sh(kl)} sh(kx) - ch(kx) + 1 \right]$$

$$M(x) = M \left[\frac{ch(kl) - 1}{sh(kl)} sh(kx) - ch(kx) \right].$$

7. Точность решения. В таблице 4.8.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением. На рисунках 4.8.2 и 4.8.3 приводятся эпюры изгибающих моментов для случая действия сжимающей и растягивающей продольной силы.

Таблица 4.8.1

Параметр	Сжимающая продольная сила		Растягивающая продольная сила	
	Теория/	MicroFe	Теория	MicroFe
Прогиб, мм	32.54	32.55	15.61	15.61
Изгибающий момент в середине пролета в, кН·м	16.51	16.51	6.88	6.88

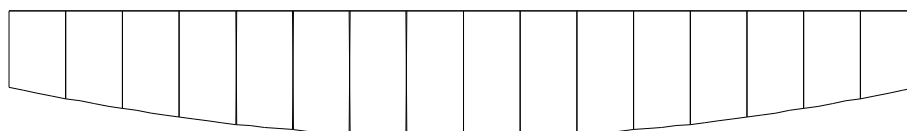


Рисунок 4.8.2

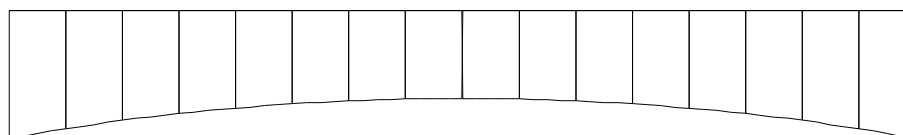


Рисунок 4.8.3

4.9 Вертикальный консольный стержень

1. Название задачи. Вертикальный консольный стержень квадратного поперечного сечения, нагружен продольной и поперечной сосредоточенными нагрузками на свободном конце (рисунок 4.9.1).

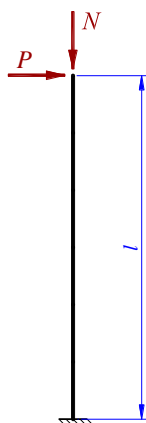


Рисунок 4.9.1

2. Формулировка задачи. Определить перемещения свободного конца w и максимальные напряжения в заземленном сечении.

3. Исходные данные.

- $E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;
- $\mu = 0$ - коэффициент Пуассона;
- $b=h = 0.5$ -м - размеры поперечного сечения;
- $l = 10$ м - длина стержня;
- $P_x = 10$ кН - сосредоточенная поперечная сила – нагружение 1;
- $P_y = 10$ кН - сосредоточенная поперечная сила – нагружение 2;
- $N = 10\,000$ кН - сосредоточенная продольная сила – нагружение 3.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалось три расчетных модели. Стержневая модель (С): 2 элемента типа «3D-стержень», 3 узла; пластинчатая модель (П): 20 элементов типа «оболочка» (сетка 2×10), 30 узлов; объемная модель (О): 10 элементов типа «3D-элемент», 40 узлов.

5. Подобласть верификации. Проверка соответствия результатов для моделей различной размерности.

6. Аналитическое решение для недеформируемых сечений.

$$\sigma_{z_{\max},P} = 6 \frac{Pl}{bh^2}, \quad \sigma_{z_{\min},N} = \frac{-N}{bh}, \quad u_{\max,P} = 4 \frac{Pl^3}{Ebh^3}, \quad v_{\min,N} = \frac{-Nl}{Ebh}$$

4.10 Двухшарнирная арка

1. Название задачи. Двухшарнирная арка, нагружена сосредоточенной силой (рис. 4.10.1). Источник [P. Dellus. Resistance de materiaux. Paris: Technique et Vulgarisation, 1958.]

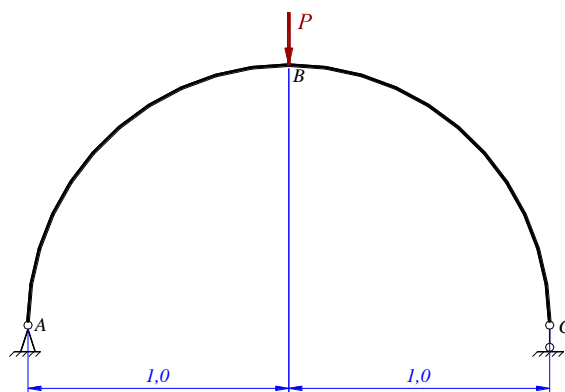


Рисунок 4.10.1

2. Формулировка задачи. Определить перемещения и углы поворота сечений в точках А, В и С.

3. Исходные данные.

- $E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;
- $G = 7.8 \cdot 10^7$ кПа - модуль сдвига;
- $F = 1.131 \cdot 10^{-4}$ м² - площадь поперечного сечения;
- $J_x = 4.637 \cdot 10^{-9}$ м⁴ - момент инерции сечения относительно оси z;
- $P = 0.1$ кН - сосредоточенная поперечная сила;
- $v_A = u_A = v_C = 0$ - краевые условия.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась стержневая модель (10 элементов типа «2D-стержень», 11 узлов).

5. Подобласть верификации. Проверка соответствия перемещений для арки.

6. Сопоставление результатов. В таблице 4.10.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением.

Таблица 4.10.1

Точка	Фактор	Эталон	MicroFe	Погрешность, %
A	θ , рад	-0.030774	-0.031090	1.03
B	v , мм	-0.019206	-0.019324	0.61
C	θ , рад	0.030774	0.031090	1.03
	u , мм	0.053912	0.053693	0.41

4.11 Балка с затяжкой

1. Название задачи. Однопролетная балка с затяжкой под равномерно-распределенной нагрузкой (рис. 4.11.1). Источник [Laredo M. Resistance de materiaux. Paris: Dunod, 1970. P. 77.]

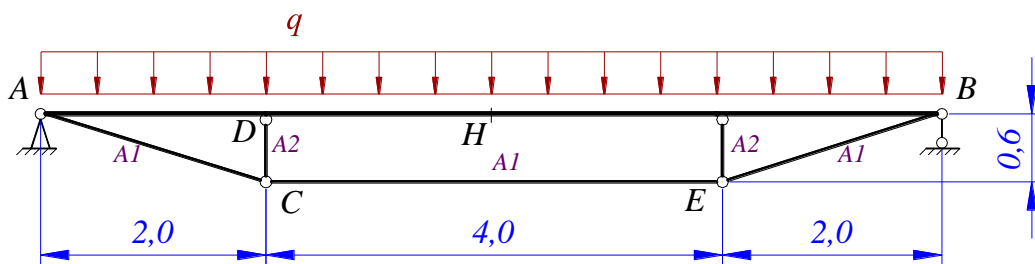


Рисунок 4.11.1

2. Формулировка задачи. Определить усилие в затяжке, изгибающий момент в сечении H и вертикальное перемещение в точке D.

3. Исходные данные.

$$A1=4.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, A2=3.48 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$\text{Стержень } AB: A=15.16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, A_q=6.064 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, I=2.174 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

$$\text{Свойства материала: } E=2.1 \cdot 10^8 \text{ кПа}, G=0.84 \cdot 10^8 \text{ кПа}.$$

$$\text{Граничные условия: } u_A=v_A=0, v_B=0.$$

$$\text{Нагрузка: } q=50 \text{ кН/м, затяжка стянута на } \delta=6.52 \text{ мм}.$$

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась стержневая модель (8 элементов типа «2D-стержень», 6 узлов). Моделирование предварительного натяжения затяжки осуществлено путем задания температурного воздействия (охлаждения) на элемент CE величиной

$$\Delta T = \frac{-\delta}{\alpha l} = \frac{-6.52 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 4.0} = -0.00163 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

5. Сопоставление результатов. В таблице 4.11.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением.

Таблица 4.11.1

Точка/элемент	Фактор	Эталон	MicroFe
CE	N, кН	584.584	584.584
H	M, кНм	49.2495	49.2495
D	v_D , мм	-0.2458	-0.2458

4.12 Плоская ферма

1. Название задачи. Плоская ферма с силовым, температурным и кинематическим нагружениями (рис. 4.12.1). Источник [Laredo M. Resistance de materiaux. Paris: Dunod, 1970. P. 579.]

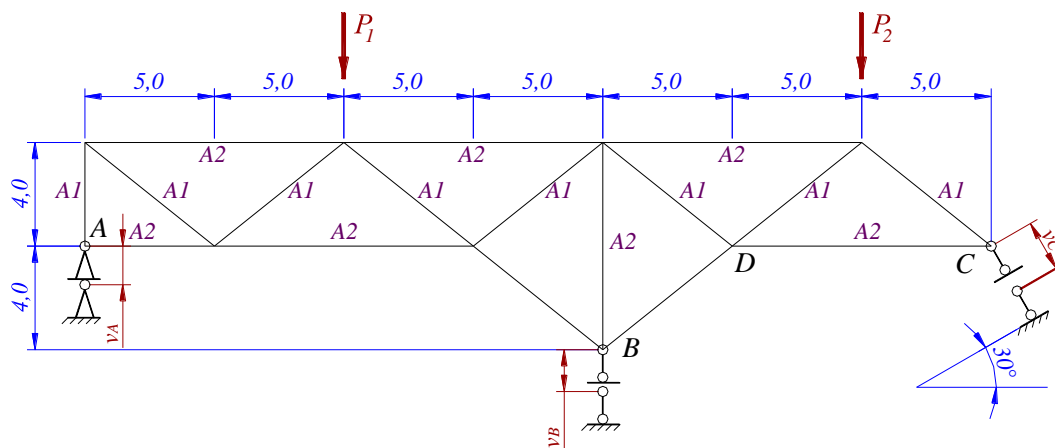


Рисунок 4.12.1

2. Формулировка задачи. Определить усилие в элементе BD и вертикальное перемещение в точке D.

3. Исходные данные.

$$A1=1.41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, A2=2.82 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Свойства материала: $E=2.1 \cdot 10^8$ кПа,

коэффициент температурного расширения $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Граничные условия: $u_A=v_A=0, v_B=v_C=0$.

Нагрузка: $P_1=150$ кН, $P_2=100$ кН;

$v_A=-0.02$ м, $v_B=-0.03$ м, $v_C=-0.015$ м;

все стержни нагреты на $150 \text{ }^\circ\text{C}$.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась стержневая модель (17 элементов типа «2D-стержень», 10 узлов).

5. Сопоставление результатов. В таблице 4.12.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением.

Таблица 4.12.1

Точка/элемент	Фактор	Эталон	MicroFe
BD	N, кН	46.633	46.634
D	v_D , мм	-16.18	-16.18

4.13 Пространственная шарнирно-стержневая система

1. Название задачи. Пространственная шарнирно-стержневая система (рис. 4.13.1).
 Источник [Beer F.P, Johnston E.R. Vector mechanics for engineers. Statics and Dynamics. New York: McGraw-Hill, 1962. P. 47]

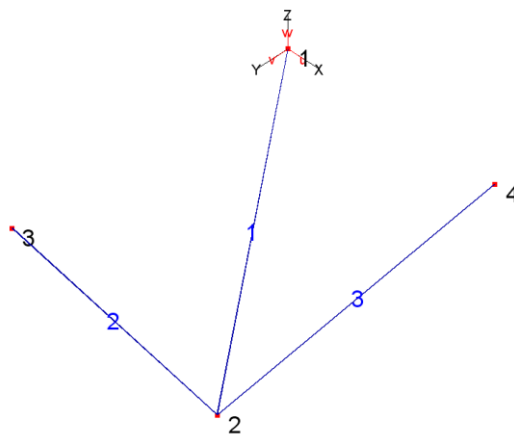


Рисунок 4.13.1

2. Формулировка задачи. Определить усилие в элементах системы при вертикальной сосредоточенной нагрузке в точке 2.

3. Исходные данные.

$$A = 6.45616 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

Свойства материала: $E = 2.1 \cdot 10^8$ кПа,

Граничные условия: $u_1 = v_1 = w_1 = u_3 = v_3 = w_3 = u_4 = v_4 = w_4 = 0$.

Нагрузка: в узле 2 по оси OZ $P = -0.226796$ кН.

Координаты узлов

Узел	X	Y	Z
1	0	0	0
2	0.6096	1.2192	-1.8288
3	0	2.4384	0
4	1.8288	0	0

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась стержневая модель (3 элемента типа «3D-стержень», 4 узла).

5. Сопоставление результатов. В таблице 4.13.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением.

Таблица 4.13.1

Элемент	Фактор	Эталон	MicroFe
1	N_1 , кН	0.047	0.047
2	N_2 , кН	0.141	0.141
3	N_3 , кН	0.1035	0.1039

4.14 Круговая шарнирно опертая пластина, нагруженная распределенной нагрузкой

1. Название задачи. Определение напряженно-деформированного состояния шарнирно опертой пластины, нагруженной распределенной нагрузкой.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Круговая шарнирно опертая пластина постоянной толщины нагружается нормальным давлением q (рисунок 4.14.1). Определить: осевое перемещение w , угол поворота θ , радиальные M_r и окружные M_θ моменты на краю пластины.

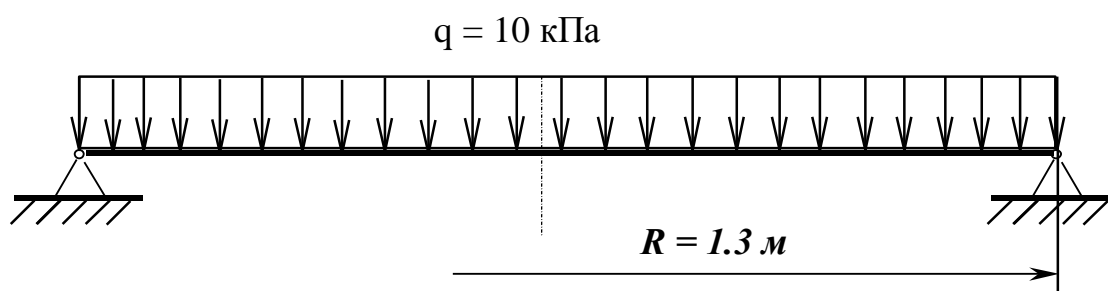


Рисунок 4.14.1

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$R = 1.3$ м	- наружный радиус пластины,
$h = 2.0 \cdot 10^{-2}$ м	- толщина пластины,
$q = -10$ кПа	- нормальное давление,
$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$	- цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель. Для расчета использовалась конечноэлементная сетка п. 4.9.

5. Подобласть верификации. Пластина постоянной толщины под действием нормального давления.

6. Аналитическое решение. Формулы для перемещений и моментов в центре пластины имеют следующий вид [С.П. Тимошенко. С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1963.]:

$$w = \frac{q \cdot R^4}{64 \cdot D} \cdot \frac{5 + \mu}{1 + \mu}, \quad \theta = 0$$

$$M_r = M_\theta = \frac{(3 + \mu) \cdot q \cdot R^2}{16}.$$

Перемещения и моменты на краю пластины

$$w = 0, \quad \theta = \frac{q \cdot R^3}{8 \cdot D \cdot (1 + \mu)},$$

$$M_r = 0, \quad M_\theta = \frac{q \cdot R^2 \cdot (1 - \mu)}{8}.$$

7. Точность решения. Сравнение результатов по программе с аналитическими решениями представлено в таблице 4.14.1

Таблица 4.14.1

Параметр	В центре пластинки		На краю пластинки	
	Теория	MicroFe	Теория	MicroFe
w, мм	-12.417	-12.56	0	0
θ, рад	0.0	0.0	0.014418	0.01458
M _r , Н·м/м	-3485.6	-3590.0	0	40
M _θ , Н·м/м	-3485.6	-3590.0	-1478.8	-1510.0

4.15 Круговая жестко заделанная пластина под распределенной нагрузкой

1. Название задачи. Определение напряженно-деформированного состояния заделанной пластины, нагруженной распределенной нагрузкой.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Круговая жестко заделанная пластина постоянной толщины нагружается нормальным давлением q (рисунок 4.15.1). Определить: осевое перемещение w , радиальные M_r и окружные M_θ моменты, радиальные σ_r и окружные σ_θ напряжения в центре пластины и по краям.

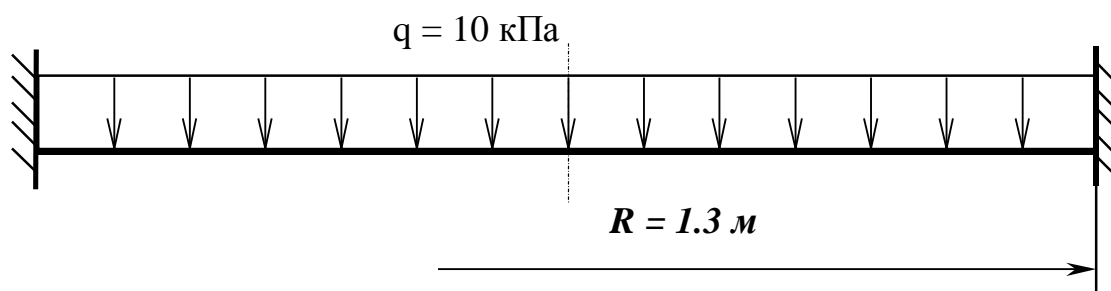


Рисунок 4.15.1

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$R = 1.3$ м	- наружный радиус пластины,
$h = 2.0 \cdot 10^{-2}$ м	- толщина пластины,
$q = -10000$ Па	- нормальное давление,
$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$	- цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель. Конечноэлементная сетка представлена на рисунке 4.15.2.

5. Подобласть верификации. Пластина постоянной толщины под действием нормального давления.

6. Аналитическое решение. Формулы для перемещений и моментов в центре пластины имеют следующий вид [С.П. Тимошенко. С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1963.]:

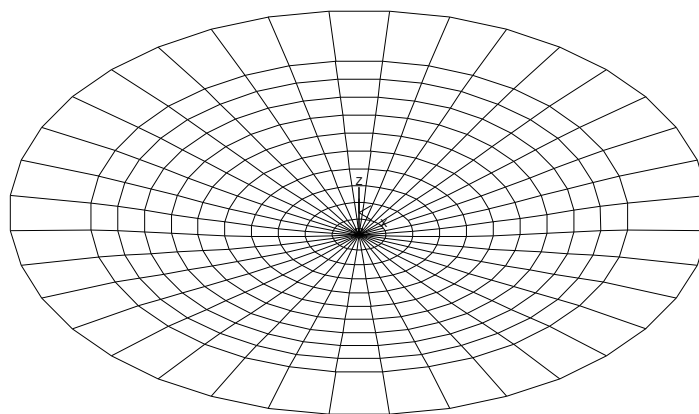


Рисунок 4.15.2

$$w_{\text{max}} = \frac{qR^4}{64D},$$

$$M_r = M_\theta = \frac{(1 + \mu)qR^2}{16},$$

Для края

$$w = 0,$$

$$M_r = \frac{qR^2}{8}, \quad M_\theta = -\frac{qR^2 \mu}{8}$$

7. Точность решения. Сравнение результатов по программе с аналитическими решениями представлено в таблице 4.15.1

Таблица 4.15.1

Параметр	В центре пластинки		На краю пластинки	
	Теория	MicroFe	Теория	MicroFe
w, мм	-3.0458	-3.028	0	0
M _r , Н·м/м	-1373.1	-1380.0	2112.5	1980.0
M _θ , Н·м/м	-1373.1	-1380.0	633.75	590.0

4.16 Кольцевая пластина шарнирно опертая по наружному контуру под распределенной нагрузкой

1. Название задачи. Определение напряженно-деформированного состояния кольцевой пластины шарнирно опертой по наружному контуру, нагруженной распределенной нагрузкой.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Кольцевая шарнирно опертая по наружному контуру пластина постоянной толщины нагружается нормальным давлением q (рисунок 4.16.1). Определить: осевое перемещение w , радиальные M_r и окружные M_θ моменты на внутреннем и наружном краю пластины.

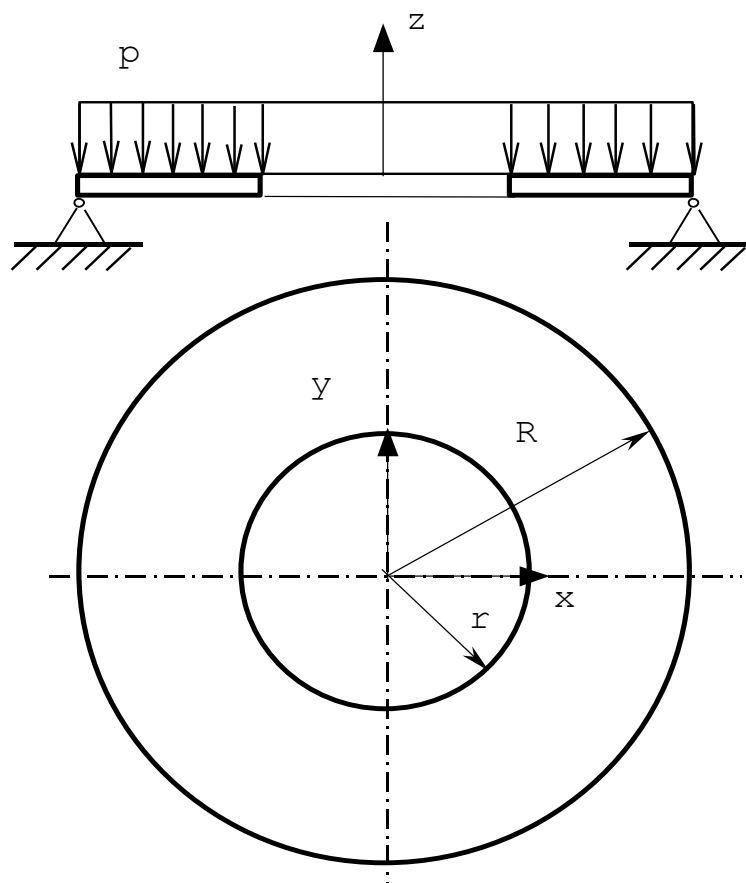


Рисунок 4.16.1

3. Исходные данные

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па | - модуль упругости, |
| $\mu = 0.3$ | - коэффициент Пуассона, |
| $R = 1.0$ м | - наружный радиус пластины, |
| $r = 0.5$ м | - внутренний радиус пластины, |

- $h = 0.02 \text{ м}$ - толщина пластины,
 $p = -10 \text{ кПа}$ - нормальное давление,
 $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель кольцевой пластины представлена на рисунке 4.16.2.

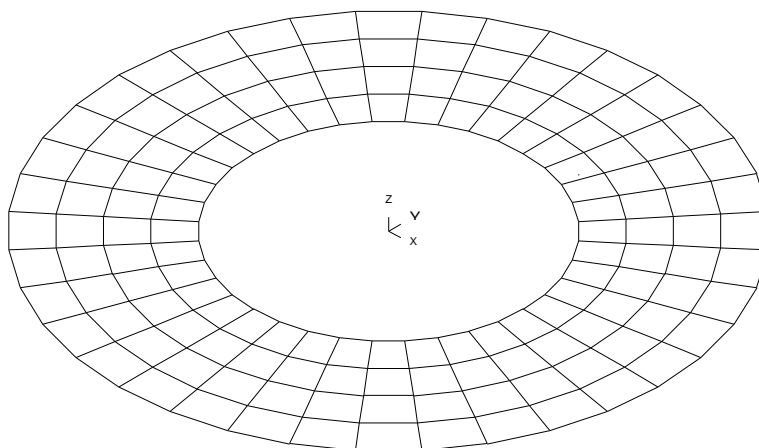


Рисунок 4.16.2

5. Подобласть верификации. Кольцевая пластина постоянной толщины под действием распределенной нагрузки.

6. Аналитическое решение. Формулы для перемещений и моментов на внутреннем и наружном краях пластины взяты из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968.].

7. Точность решения. Сравнение результатов по программе с аналитическими решениями представлено в таблице 4.16.1

Таблица 4.16.1

Параметр	на внутреннем крае		на наружном крае	
	Теория	MicroFe	Теория	MicroFe
w, мм	-4.26	-4.29	0	0
M _r , кН·м/м	0	0.08	0	0.08
M _θ , кН·м/м	2.40	2.44	0.91	1.1

4.17 Квадратная пластина свободно опертая по периметру нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

1. Название задачи. Определение максимальных перемещений и изгибающих моментов в квадратной пластине свободно опертой по периметру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой p .

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная изотропная пластина постоянной толщины свободно опертая по периметру и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой p (рисунок 4.17.1). Определить: максимальные перемещения и изгибающие моменты.

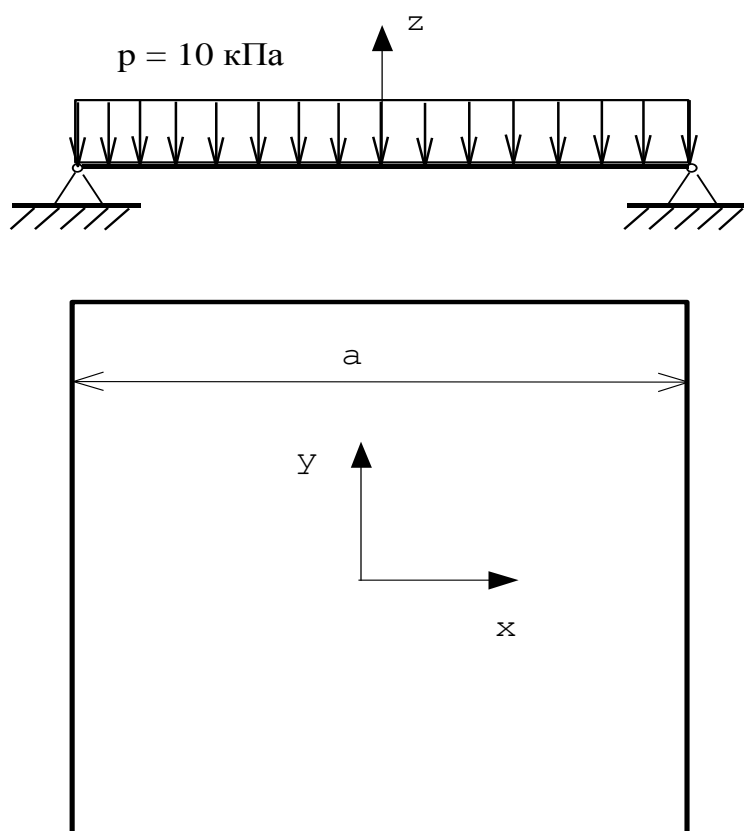


Рисунок 4.17.1

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ Па}$	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$a_x = a_y = 1.5 \text{ м}$	- сторона пластины,
$h = 0.01 \text{ м}$	- толщина пластины,
$p = 10 \text{ кПа}$	- нормальное давление,

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$$

- цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель представлена на рисунке 4.17.2

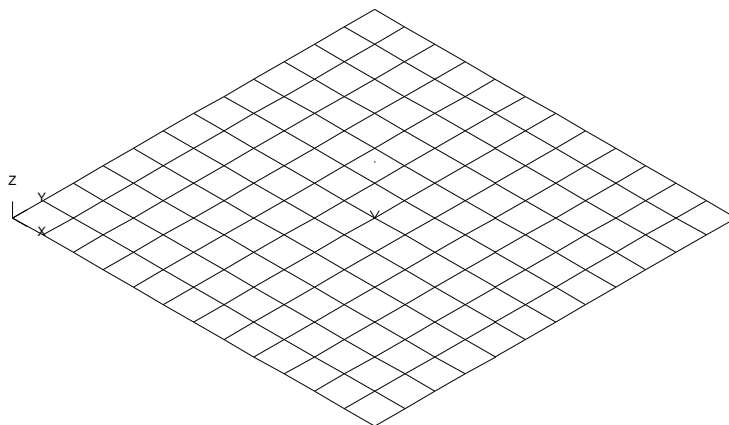


Рисунок 4.17.2

5. Подобласть верификации. Напряженно-деформированное состояние квадратной пластины постоянной толщины.

6. Аналитическое решение. Формулы для определения перемещений и моментов в центре пластины взяты из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968.].

7. Точность решения. Сравнение максимальных перемещений и моментов, определенных по программе с аналитическими значениями представлено в таблице 4.17.1

Таблица 4.17.1

Параметр	Теория	MicroFe
Перемещение в центре пластины, мм	10.97	11.1
Изгибающий момент M_x , кН·м	1.08	1.07
Изгибающий момент M_y , кН·м	1.08	1.07

4.18 Кручение консольной тонкой плиты

1. Название задачи. Прямоугольная консольная тонкая плита с двумя сосредоточенными нагрузками (рис. 4.18.1). Источник [Robinson J. Element evaluation. A set of assessment parts and tests, *Proceeding of Finite Element Methods in the commercial environment*, vol. 1, October 1978. Batoz J.L., Tahar M.B. Evaluation of new quadrilateral thin plate boundary element, *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 18, Jon Wiley & Sons, 1982.]

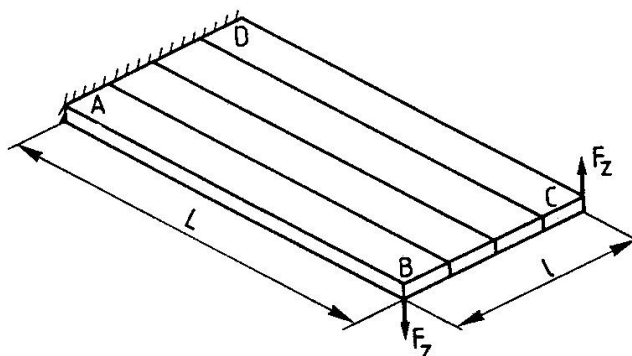


Рисунок 4.18.1

2. Формулировка задачи. Определить вертикальное перемещение в точке С.

3. Исходные данные.

$E = 1.0 \cdot 10^4$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.25$	- коэффициент Пуассона,
$l = 1$ м	- сторона плиты,
$L = 12$ м	- сторона плиты,
$h = 0.05$ м	- толщина плиты,
$F_z = 0.001$ кН	- сосредоточенная сила.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась сетка 24×4 - 96 элементов типа «плита», 125 узлов. Расчет был выполнен как для теории изгиба плит Кирхгофа-Лява, так и для теории Рейсснера-Миндлина

5. Сопоставление результатов. В таблице 4.18.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением. Эталонное решение получено для теории тонких плит Кирхгофа-Лява.

Таблица 4.18.1

Точка	Фактор	Эталон	MicroFe	Отклонение, %
Кирхгоф	v_C , мм	35.37	35.1475	0.62
Миндлин	v_C , мм	35.37	37.0391	4.72

4.19 Шестиугольная правильная пластина, защемленная по контуру, под действием равномерно распределенной нагрузки

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние защемленной шестиугольной пластины под равномерно распределенной нагрузкой.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Шестиугольная правильная пластина, защемленная по контуру, постоянной толщины нагружается нормальным давлением p (рисунок 4.19.1). Определить: осевое перемещение w и изгибающие моменты M_x , M_y в центре пластины.

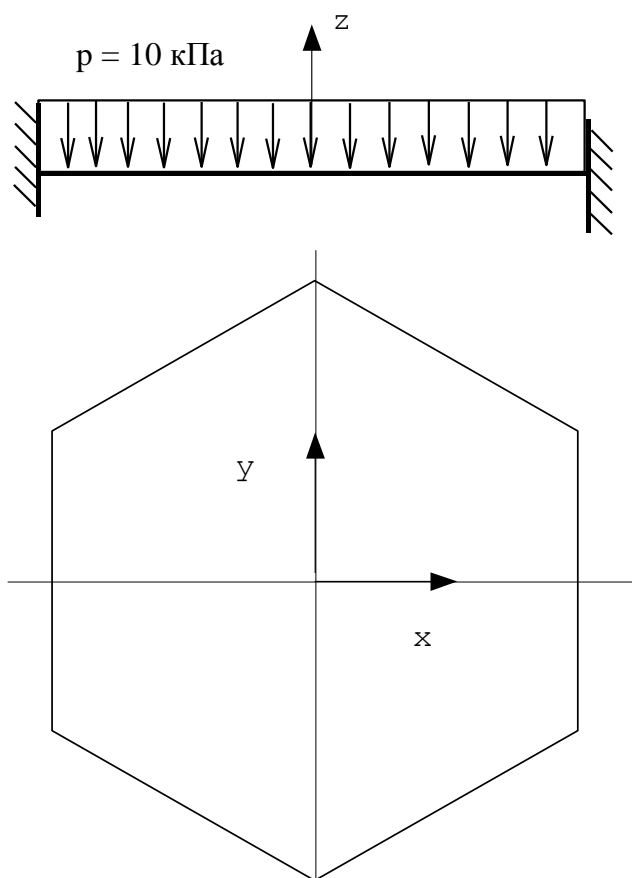


Рисунок 4.19.1

3. Исходные данные

- $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,
 $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
 $a = 0,134$ м - сторона шестигранной пластины,
 $h = 0,003$ м - толщина пластины,
 $q = 1000$ кПа - значение равномерно распределенной нагрузки,

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad \text{- цилиндрическая жесткость.}$$

4. Конечноэлементная модель пластины представлена на рисунке 4.19.2.

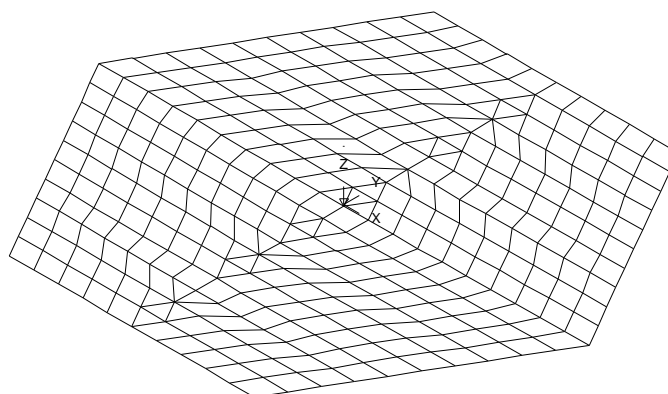


Рисунок 4.19.2

5. Подобласть верификации. Шестигранная пластина постоянной толщины под действием нормального давления.

6. Аналитическое решение. Формулы для перемещений и изгибающих моментов в центре пластины имеют следующий вид [Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. Киев: Будівельник. 1973.]:

Перемещение в центре пластинки:

$$w = 0,009979 \frac{qa^4}{D}.$$

Изгибающие моменты в центре пластины

$$M_x = M_y = 0,049835 (1 + \mu) qa^2.$$

7. Точность решения. Сравнение результатов по программе с аналитическими решениями представлено в таблице 4.19.1

Таблица 4.19.1

Параметр	Теория	MicroFe
Перемещение в центре пластины, мм	6.38	6.47
Изгибающий момент M_x , кН·м/м	1.14	1.15
Изгибающий момент M_y , кН·м/м	1.14	1.15

4.20 Определение изгибающих моментов в заделанной пластине постоянной толщины при температурном нагружении

1. Условие задачи. Определить изгибающие моменты и напряжения в прямоугольной пластине заделанной по контуру при изменении температуры по толщине пластины по линейному закону.

2. Постановка задачи. Рассматривается заделанная по контуру прямоугольная пластина постоянной толщины. Температура в плоскостях, параллельной срединной поверхности пластины постоянна, а по толщине пластины изменяется по линейному закону.

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па	- модуль упругости,
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона,
$a_x = 1.5$ м	- сторона пластины,
$a_y = 2.5$ м	- сторона пластины,
$h = 0.02$ м	- толщина пластины,
$\alpha = 15 \cdot 10^{-6}$ м·К ⁻¹	- коэффициент линейного температурного расширения материала,
$\Delta T = 20$ С°	- разность температур между поверхностями пластины,
$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$	- цилиндрическая жесткость.

4. Конечноеэлементная модель. Пластина разбивалась на 200 четырехузловых элементов.

5. Подобласть верификации. Напряженно деформированное состояние прямоугольной пластины при температурном нагружении.

6. Аналитическое решение. Формула для изгибающих моментов в заделанной пластине, при изменении температуры по толщине пластины по линейному закону имеют следующий вид [С.П. Тимошенко. С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1963]:

$$M_x = M_y = D \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot (1 + \mu)}{h}.$$

Наибольшие температурные напряжения равны

$$\sigma = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot E}{2 \cdot (1 - \mu)}.$$

7. Точность решения. Сравнение результатов по программе с аналитическими решениями представлено в таблице 4.20.1

Таблица 4.20.1

Параметр	Теория	MicroFe
Перемещение пластины, мм	0	0
Изгибающий момент $M_x=M_y$, кН·м/м	2.86	2.86
Наибольшие температурные напряжения, МПа	42.86	42.86

4.21 Криволинейный брус (задача Головина)

1. Название задачи. Изгиб кривого бруса узкого прямоугольного сечения силой, приложенной к незакрепленному концу (рис. 4.21.1). Источник [Демидов С.П. Теория упругости, М., Высшая школа, 1979.]

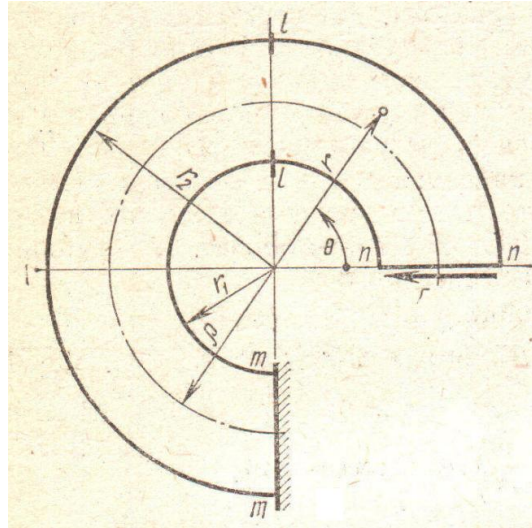


Рисунок 4.21.1

2. Формулировка задачи. Определить напряжения в брус при $\theta = 90^\circ$.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$h = 1$ м	толщина бруса;
$R_1 = 5$ м	- внутренний радиус;
$R_2 = 15$ м	- внешний радиус;
$P = 5$ кН	- сосредоточенная сила.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась сетка 10×30 - 300 конечных элементов плоской оболочки, 341 узел (рис.4.21.2).

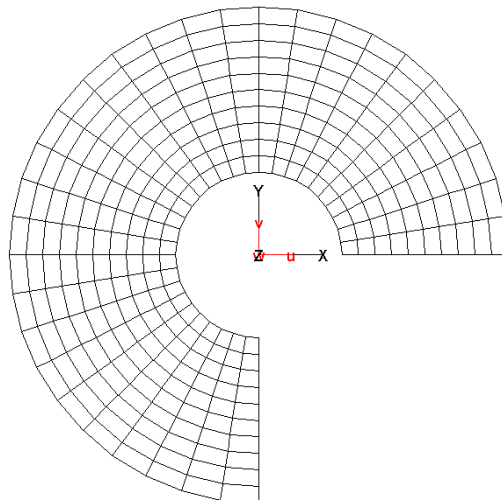


Рисунок 4.21.2

5. Аналитическое решение. Напряжения в брус определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = P(r - (r_1^2 + r_2^2)/r + r_1^2 r_2^2 / r^3) \sin \theta / K_0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = P(3r - (r_1^2 + r_2^2)/r - r_1^2 r_2^2 / r^3) \sin \theta / K_0$$

$$\sigma_{r\theta} = -P(r - (r_1^2 + r_2^2)/r + r_1^2 r_2^2 / r^3) \cos \theta / K_0$$

$$K_0 = r_1^2 - r_2^2 + (r_1^2 + r_2^2) \ln(r_2 / r_1)$$

6. Сопоставление результатов. В таблице 4.21.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением (напряжения при $\theta = 90^\circ$).

Таблица 4.21.1

	$\sigma_{\theta\theta}^{min}$	$\sigma_{\theta\theta}^{max}$	$\sigma_{rr}, (r=8m)$
MicroFe	-5.42	1.79	-0.81
Эталон	-5.36	1.79	-0.82
Отклонение	1.011	1.000	0.988

4.22 Кли́н с сосредото́ченной силой (задача Мичелла)

1. Название задачи. Сжатие и изгиб симметричного клина силой, приложенной к его вершине (рис. 4.22.1). Источник [Демидов С.П. Теория упругости, М., Высшая школа, 1979.]

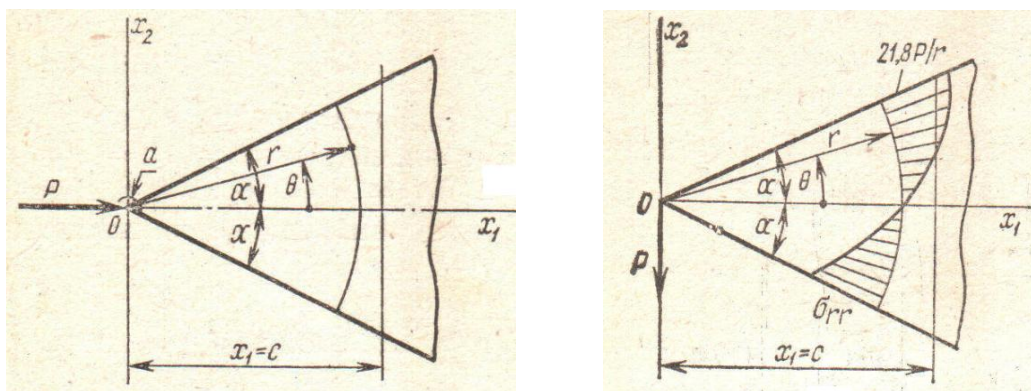


Рисунок 4.22.1

2. Формулировка задачи. Определить напряжения в клине (для $r = 5.25$ м) при сжатии и изгибе сосредоточенными силами приложенными к его вершине.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$h = 1$ м	- толщина клина;
$R = 15$ м	- радиус ограничивающий область клина;
$P_1 = 5.25$ кН	- сжимающая (горизонтальная) сила;
$P_2 = 5.25$ кН	- изгибающая (вертикальная) сила;
$2\alpha = 30^\circ$	- угол при вершине клина.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась сетка 40×40 - 1600 конечных элементов плоской оболочки, 1641 узел (рис.4.22.2). При $r = 15$ м узлы зашечлены.

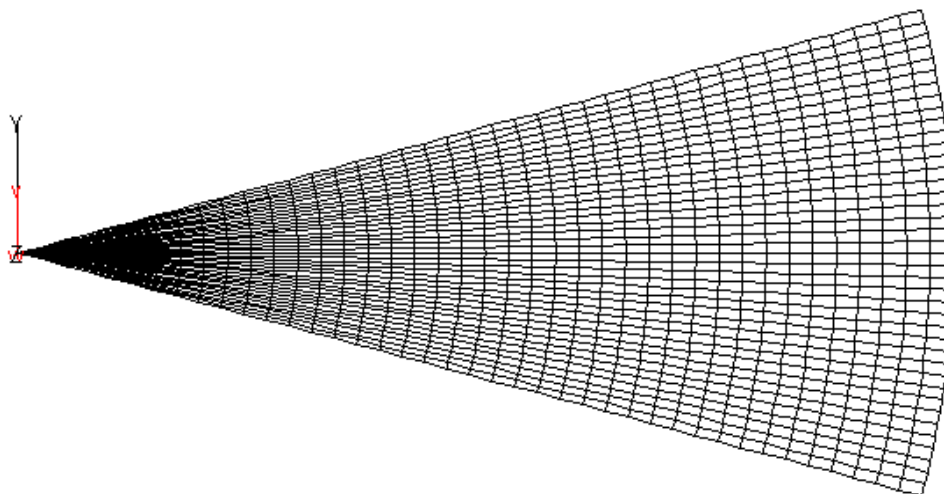


Рисунок 4.22.2

5. Аналитическое решение. Напряжения в клине для случая сжатия горизонтальной силой определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = -2P \cos \theta / (r(2\alpha + \sin 2\alpha)), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$$

Напряжения в клине для случая изгиба вертикальной силой определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = 2P \sin \theta / (r(2\alpha - \sin 2\alpha)), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$$

6. Сопоставление результатов. В таблице 4.22.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением для случая сжимающей силы, а в таблице 4.22.2 – для изгибающей силы (напряжения при $r=5.25$).

Таблица 4.22.1

	σ_{rr}^{\min}	σ_{rr}^{\max}	σ_{xx}^{\min} ,	σ_{xx}^{\max}	τ_{xy}
MicroFe	1.89	1.96	1.71	1.96	0.448
Эталон	1.88	1.95	1.71	1.95	0.456
Отклонение	1.005	1.005	1.000	1.005	0.982

Таблица 4.22.2

	σ_{rr}^{\max}	σ_{xx}^{\max}	τ_{xy}
MicroFe	21.98	20.55	5.39
Эталон	21.8	19.9	5.28
Отклонение	1.008	1.033	1.021

4.23 Изгиб клина моментом (задача Инглиса)

1. Название задачи. Изгиб симметричного клина моментом, приложенным к его вершине (рис. 4.23.1). Источник [Демидов С.П. Теория упругости, М., Высшая школа, 1979.]

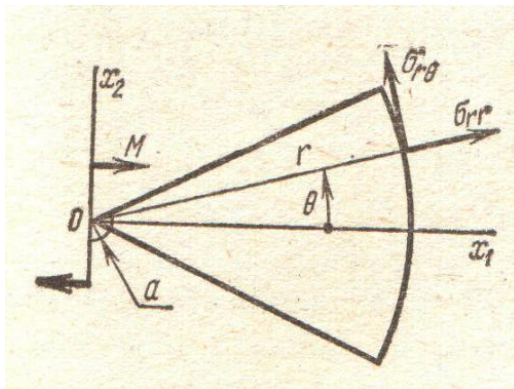


Рисунок 4.23.1

2. Формулировка задачи. Определить напряжения в клине (для $r = 5.25$ м) при изгибе сосредоточенным моментом, сосредоточенным к его вершине.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$h = 1$ м	- толщина клина;
$R = 15$ м	- радиус ограничивающий область клина;
$M = 27.5625$ кНм	- сосредоточенный момент;
$2\alpha = 30^\circ$	- угол при вершине клина.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась сетка 40×40 - 1600 конечных элементов плоской оболочки, 1641 узел (рис.4.23.2). При $r = 15$ м узлы защемлены.

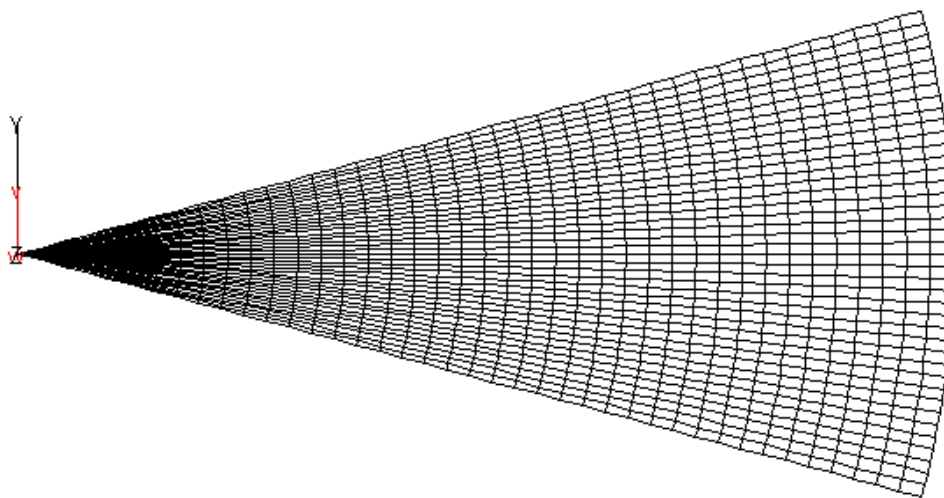


Рисунок 4.23.2

5. Аналитическое решение. Напряжения в клине для этого случая определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = 2M \sin 2\theta / (r^2 (2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) \cos 2\alpha), \quad \sigma_{\theta\theta} = 0$$

$$\sigma_{r\theta} = M(1 - \cos 2\theta / \cos 2\alpha) / (r^2 (2\alpha - \operatorname{tg} \alpha))$$

6. Сопоставление результатов. В таблице 4.23.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением (напряжения при $r = 5.25$).

Таблица 4.23.1

	$\sigma_{rr}^{\theta=\alpha}$	$\sigma_{r\theta}^{\theta=0}$
MicroFe	21.60	2.89
Эталон	21.48	2.88
Отклонение	1.006	1.003

4.24 Изгиб клина распределенной нагрузкой (задача Леви)

1. Название задачи. Изгиб симметричного клина равномерно распределенной нагрузкой (рис. 4.24.1). Источник [Демидов С.П. Теория упругости, М., Высшая школа, 1979.]

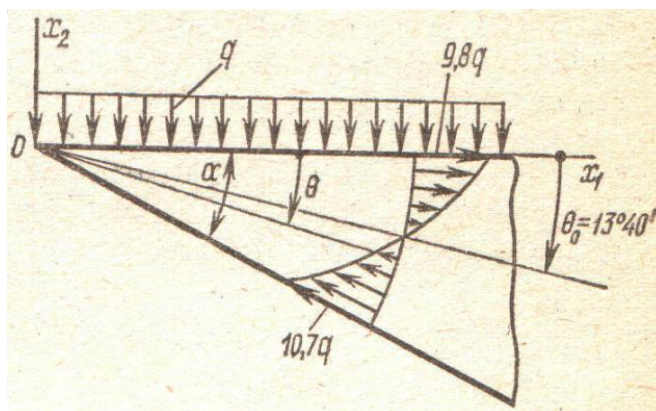


Рисунок 4.24.1

2. Формулировка задачи. Определить напряжения σ_{rr} в клине и угол θ_0 при котором $\sigma_{rr} = 0$ для изгиба равномерно распределенной нагрузкой.

3. Исходные данные.

- | | |
|--------------------------|--|
| $E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа | - модуль упругости, |
| $\mu = 0.2$ | - коэффициент Пуассона, |
| $h = 1$ м | - толщина клина; |
| $R = 15$ м | - радиус ограничивающий область клина; |
| $q = 10$ кН/м | - распределенная нагрузка; |
| $\alpha = 30^\circ$ | - угол при вершине клина. |

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась сетка 40×40 - 1600 конечных элементов плоской оболочки, 1641 узел (рис.4.23.2). При $r = 15$ м узлы защемлены.

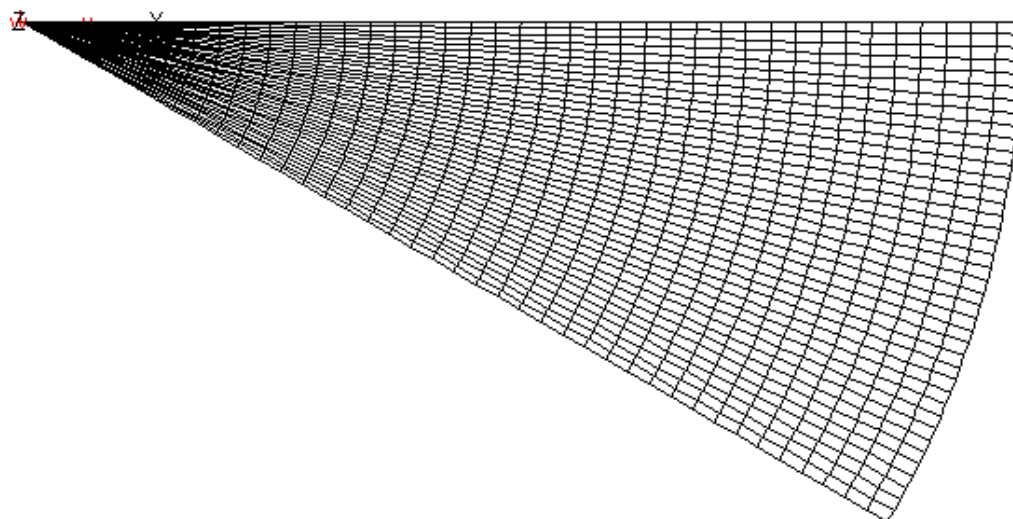


Рисунок 4.24.2

5. Аналитическое решение. Напряжения в клине для этого случая определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = q(2\alpha - 2\theta - (1 - \cos 2\theta)\operatorname{tg} \alpha - \sin 2\theta)/(2K),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = q(2\alpha - 2\theta - (1 + \cos 2\theta)\operatorname{tg} \alpha + \sin 2\theta)/(2K),$$

$$\sigma_{r\theta} = q(1 - \operatorname{tg} \alpha \sin 2\theta - \cos 2\theta)/(2K),$$

$$K = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$$

Как следует из аналитического решения, напряжения не зависят от расстояния r .

6. Сопоставление результатов. В таблице 4.24.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением.

Таблица 4.24.1

	$\sigma_{rr}^{\theta=0}$	$\sigma_{rr}^{\theta=\alpha}$	θ_0
MicroFe	97.4	-107.4	-14°15'
Эталон	98.0	-107.0	-13°40'
Отклонение	0.994	1.004	1.040

4.25 Треугольная подпорная стенка

1. Название задачи. Изгиб подпорной стенки, нагруженной давлением воды, изменяющемся по линейному закону (рис. 4.25.1). Источник [Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности, М., Высшая школа, 1982].

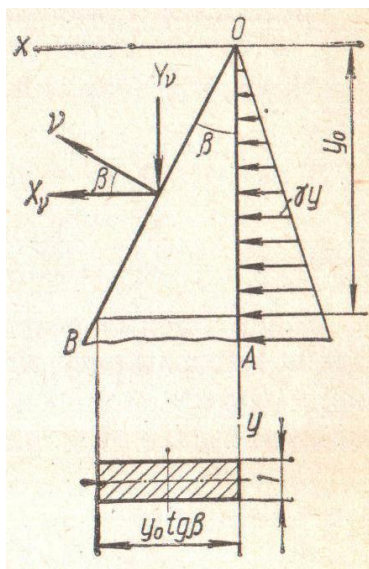


Рисунок 4.25.1

2. Формулировка задачи. Определить напряжения в подпорной стенке для изгиба распределенной нагрузкой, меняющейся по линейному закону.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$h = 1$ м	- толщина стенки;
$H = 10$ м	- высота стенки;
$B = 5$ м	- ширина основания стенки;
$\gamma_1 = 20$ кН/м ³	- удельный вес материала стенки;
$\gamma_2 = 10$ кН/м ³	- удельный вес воды;
$\beta = 30^\circ$	- угол при вершине стенки.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались три варианта расчетной схемы - сетка 1×1 м (32 конечных элемента плоской оболочки, 43 узла), сетка 0.5×0.5 м (122 конечных элемента плоской оболочки, 143 узла) и сетка 0.25×0.25 м (474 конечных элемента плоской оболочки, 515 узлов) (рис.4.25.2). Высота стенки принята 10 м. По нижней грани узлы зашкелены.

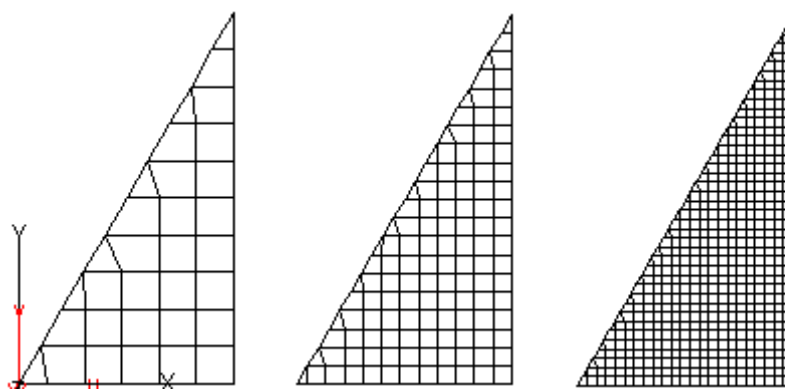


Рисунок 4.25.2

5. Аналитическое решение. Напряжения в подпорной стенке, простирающейся неограниченно по вертикали вниз, определяются по формулам

$$\sigma_x = -\gamma y, \quad \tau_{xy} = -\gamma y / \operatorname{tg}^2 \beta$$

$$\sigma_y = (\gamma_1 / \operatorname{tg} \beta - 2\gamma / \operatorname{tg}^3 \beta)x + (\gamma / \operatorname{tg}^2 \beta - \gamma_1)y$$

6. Сопоставление результатов. В таблице 4.25.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением при $y_0 = H/2$. В таблице 4.25.2 приведены нормализованные значения напряжений при $y_0 = H/2$.

Таблица 4.25.1

Сетка	σ_x^{\min}	σ_y^{\min}	τ_{xy}^{\max}	σ_x^{\max}	σ_y^{\max}	τ_{xy}^{\min}
1×1м	-46.58	49.29	-0.99	-48.75	-153.91	-83.64
0.5×0.5м	-48.06	49.37	-0.16	-49.45	-152.65	-85.64
0.25×0.25м	-49.02	49.49	-0.04	-49.72	-152.78	-86.44
Эталон	-50.00	50.00	0.00	-50.00	-150.00	-86.60

Таблица 4.25.2

Сетка	σ_x^{\min}	σ_y^{\min}	σ_x^{\max}	σ_y^{\max}	τ_{xy}^{\min}
1×1м	0.932	0.986	0.975	1.026	0.966
0.5×0.5м	0.961	0.988	0.989	1.018	0.989
0.25×0.25м	0.980	0.990	0.994	1.018	0.998
Эталон	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

4.26 Действие на плоскость сосредоточенных момента и силы

1. Название задачи. Действие на плоскость сосредоточенного момента и сосредоточенной силы. Источник [Демидов С.П. Теория упругости, М., Высшая школа, 1979.]

2. Формулировка задачи. Определить напряжения при действии на плоскость сосредоточенного момента и сосредоточенной силы.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$h = 1$ м	- толщина плоскости;
$R = 10$ м	- радиус ограничивающий область плоскости;
$P = 100$ кН	- сосредоточенная сила в центре сила;
$M = 100$ кНм	- сосредоточенный момент в центре.

4. Конечноэлементная модель. Плоскость представлялась кругом радиуса 10 м. Рассматривалась сетка с шагом 0.05м по радиусу и углом 9° по окружной координате при $r < 1$ м и с шагом 0.5 м по радиусу и углом 9° по окружной координате при $1\text{м} < r < 10\text{м}$ - 1600 конечных элементов плоской оболочки, 1641 узел (рис.4.26.1). При $r = 10$ м узлы защемлены.

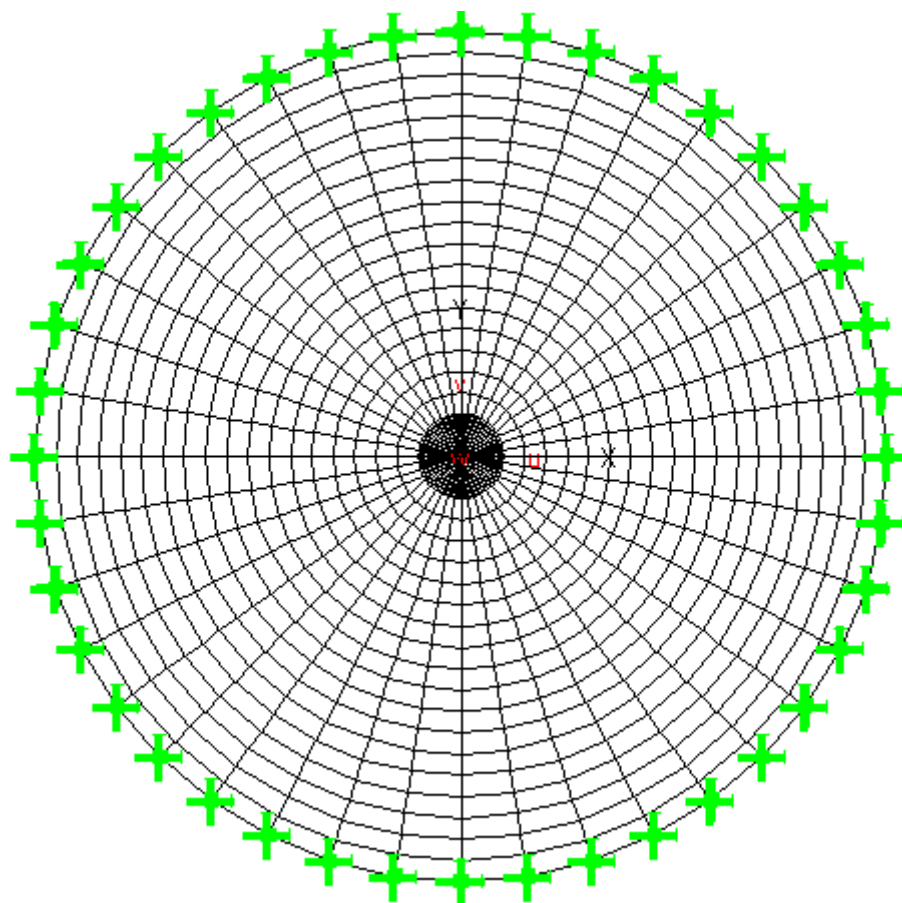


Рисунок 4.26.1

5. Аналитическое решение. Напряжения в плоскости для случая сосредоточенного момента определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = -M / (2\pi r^2)$$

Напряжения в плоскости для случая сосредоточенной силы определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = -(3 + \nu)P \cos \theta / (4\pi r), \quad \sigma_{\theta\theta} = (1 - \nu)P \cos \theta / (4\pi r)$$

$$\sigma_{r\theta} = (1 - \nu)P \sin \theta / (4\pi r)$$

6. Сопоставление результатов. В таблице 4.26.1 представлено сравнение результатов расчета $\sigma_{r\theta}$ по программе с эталонным решением для случая сосредоточенного момента, в таблице 4.26.2 – σ_{rr} при $\theta=0$ для сосредоточенной силы, и в таблице 4.26.3 – $\sigma_{\theta\theta}$ при $\theta=0$ для сосредоточенной силы.

Таблица 4.26.1 ($\sigma_{r\theta}$)

г, м	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
MicroFe	368	63.53	15.70	4.15	1.78	0.99	0.64
Эталон	398	63.66	15.92	3.98	1.77	0.99	0.64
Отклонение	0.925	0.998	0.986	1.043	1.006	1.000	1.000

Таблица 4.26.2 (σ_{rr} $\theta=0$)

г, м	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
MicroFe	130.23	51.08	23.35	13.08	8.68	6.55	5.31
Эталон	127.32	50.93	25.46	12.73	8.49	6.37	5.09
Отклонение	1.023	1.003	0.917	1.027	1.022	1.028	1.043

Таблица 4.26.3 ($\sigma_{\theta\theta}$ $\theta=0$)

г, м	0.2	0.5	1.0
MicroFe	31.08	12.37	6.37
Эталон	31.83	12.73	6.36
Отклонение	0.976	0.972	1.002

4.27 Растяжение пластины с малым круговым отверстием (задача Кирша)

1. Название задачи. Растяжение пластины с малым круговым отверстием (задача Кирша).
Источник [Демидов С.П. Теория упругости, М., Высшая школа, 1979.]

2. Формулировка задачи. Квадратная пластина значительной ширины с малым отверстием радиуса a в ее центральной части подвергается равномерному растяжению напряжениями σ (рис. 4.27.1). Определить напряжения.

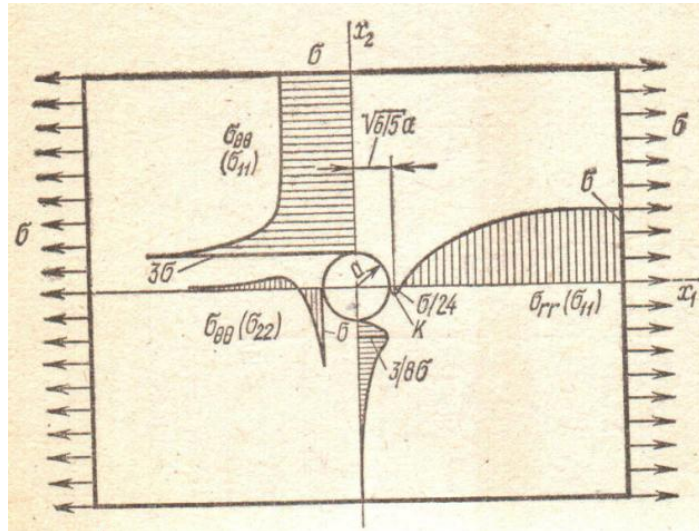


Рисунок 4.27.1

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости,
$\mu = 0.2$	- коэффициент Пуассона,
$h = 1$ м	- толщина пластины;
$a = 1$ м	- радиус отверстия;
$2b = 60$ м	- сторона пластинки;
$\sigma = 100$ кН/м	- растягивающее напряжение;

4. Аналитическое решение. Напряжения в пластинке определяются по формулам

$$\sigma_{rr} = \sigma(1 - a^2/r^2)/2 + \sigma(1 - 4a^2/r^2 + 3a^4/r^4) \cos 2\theta / 2,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma(1 + a^2/r^2)/2 - \sigma(1 + 3a^4/r^4) \cos 2\theta / 2$$

$$\sigma_{r\theta} = -\sigma(1 + 2a^2/r^2 - 3a^4/r^4) \sin 2\theta / 2$$

5. Сопоставление результатов. В таблице 4.27.1 представлено сравнение результатов расчета $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{rr} по программе с эталонным решением.

Таблица 4.27.1 $\sigma_{r\theta}$)

г, м	$\sigma_{\theta\theta}^{\theta=90}$, y=a	$\sigma_{\theta\theta}^{\theta=90}$, y=b	$\sigma_{\theta\theta}^{\theta=0}$, x=a	$\sigma_{rr}^{\theta=0}$, x= $\sqrt{6/5}a$	max $\sigma_{rr}^{\theta=90}$
MicroFe	301.90	99.62	-101.04	-3.94	37.42
Эталон	300.00	100.00	-100.00	-4.16	37.50
Отклонение	1.006	0.996	1.010	0.947	0.998

4.28 Балка-стенка под распределенной нагрузкой

1. Название задачи. Балка-стенка под распределенной нагрузкой (рис. 4.28.1). Источник [Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Наука, 1977.]

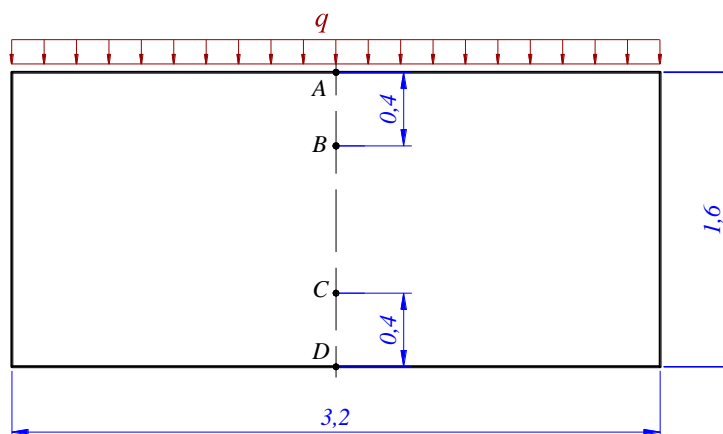


Рисунок 4.28.1

2. Формулировка задачи. Определить напряжения σ_x в точках А, В, С и D.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$q = 500$ кН/м - распределенная поперечная нагрузка;

Краевые условия - вертикальное опирание по боковым сторонам.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались три варианта расчетной схемы - сетка 2×4 (8 конечных элементов плоской оболочки, 15 узлов), сетка 4×8 (32 конечных элемента плоской оболочки, 45 узлов) и сетка 8×16 (128 конечных элементов плоской оболочки, 153 узла) (рис.4.28.2).

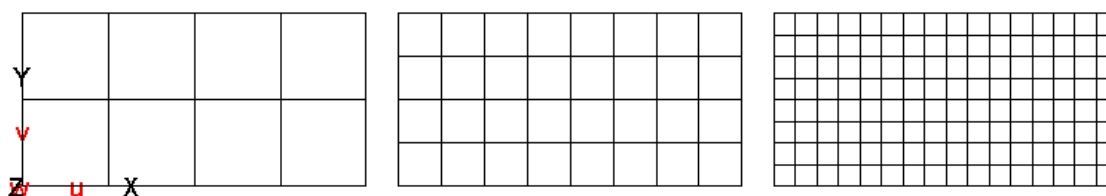


Рисунок 4.28.2

5. Подобласть верификации. Проверка точности напряжений σ_x для балки-стенки.

6. Сопоставление результатов. В таблице 4.28.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением. В таблице 4.28.2 приведены нормализованные значения $\bar{\sigma} = \sigma_x / \sigma_x^{\text{эталон}}$

Таблица 4.28.1

Точка	Эталон	2×4	4×8	8×16
A	-16070	-16152	-16078	-16106
B	-7045	---	-6882	-7015
C	7090	---	6892	7016
D	15925	15889	15941	15957

Таблица 4.28.2

Точка	Эталон	2×4	4×8	8×16
A	1.000	1.005	1.000	1.002
B	1.000	---	0.977	0.996
C	1.000	---	0.972	0.990
D	1.000	0.998	1.001	1.002

4.29 Квадратная пластинка, оконтуренная стержнем

1. Название задачи. Квадратная пластинка, оконтуренная стержнем (рис. 4.29.1).

Источник [Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007, стр.238-240.]

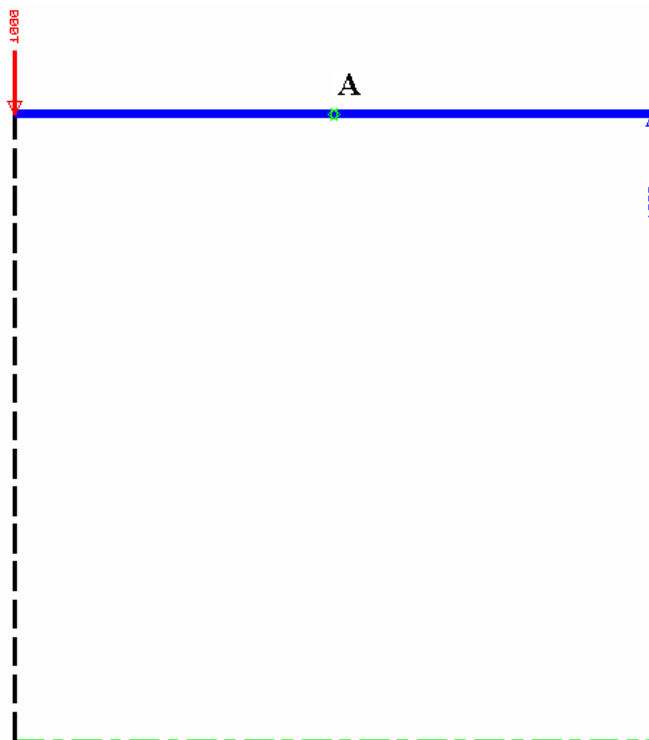


Рисунок 4.29.1

2. Формулировка задачи. Рассматривается квадратная пластинка. Вдоль верхней границы пластинки размещен стержень, абсолютно жесткий на изгиб и растяжение-сжатие. В точке А (на верхней границе) узел закреплен от горизонтального смещения. По нижней границе пластинка жестко закреплена. На пластинку действуют две сосредоточенные силы, направленные в противоположные стороны (рис. 4.29.1). Определить касательные напряжения τ_{xy} в узловых точках расчетной схемы и проверить площадь эпюры касательных напряжений по горизонтальным сечениям пластины при $y = 0, 2, 4, 6, 8$ на соответствие значению горизонтальной реакции в точке А.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^5$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.25$	- коэффициент Пуассона;
$P = 1000$	- сосредоточенная сила;
$h = 1.0$	- толщина пластины;
$a = 16$	- габаритный размер пластины.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась два варианта расчетной схемы. В обоих вариантах была принята одна и та же дискретизация - сетка 8×8 (64 конечных элемента плоской оболочки, 8 стержневых конечных элемента, 81 узел) (рис.4.29.2). В первом варианте расчетной схемы была задана для стержня конечная жесткость большой величины – $EI = 3.0 \cdot 10^{12}$, $EA = 3.0 \cdot 10^{15}$. Во втором варианте расчетной схемы стержень был задан непосредственно абсолютно жестким телом. Оба варианта расчетной схемы соответствуют модели В по [Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007, стр.238-240.].

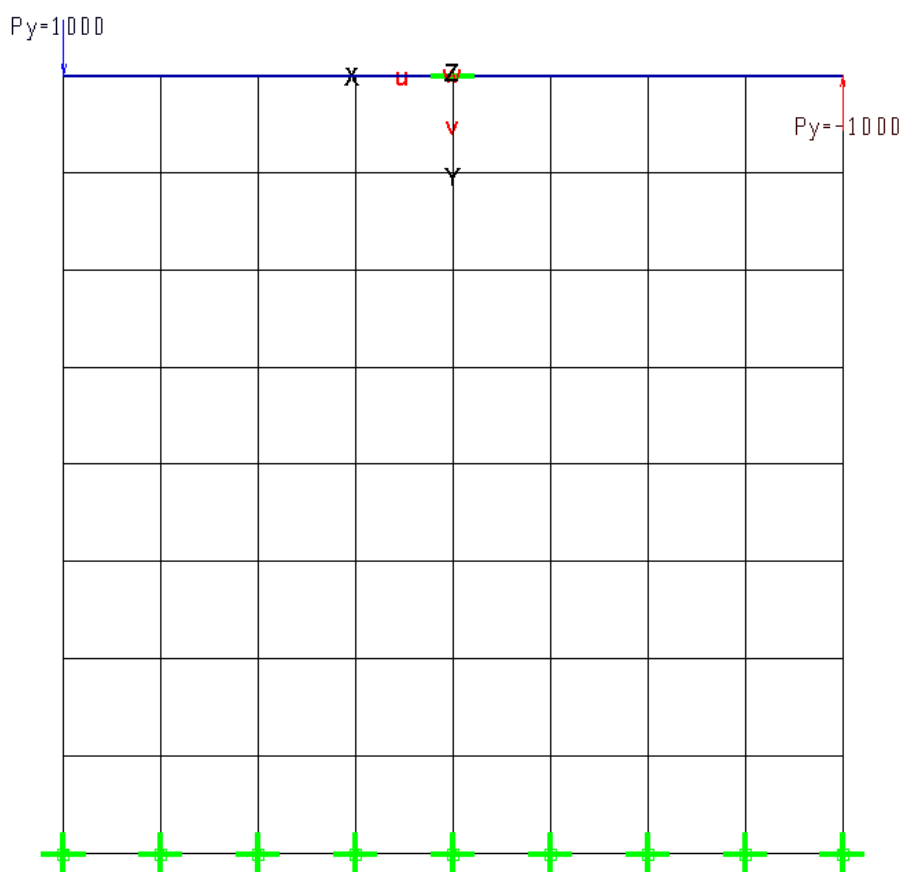


Рисунок 4.29.2

5. Подобласть верификации. Проверка точности и соответствия касательных напряжений τ_{xy} значению горизонтальной реакции в точке А.

6. Сопоставление результатов. На рис. 4.29.3 приведены изолинии касательных напряжений для варианта 1, на рис. 4.29.4 – приведены численные значения этих же напряжений в узлах сетки. На рис. 4.29.5 приведены изолинии касательных напряжений для варианта 2, на рис. 4.29.6 – приведены численные значения этих же напряжений в узлах сетки. Как видно на этих рисунках, результаты для обоих вариантов практически одинаковы. Горизонтальная реакция в точке А для первого варианта равна $H_A^I = 874$. Горизонтальная реакция в точке А для второго варианта равна $H_A^{II} = 875$.

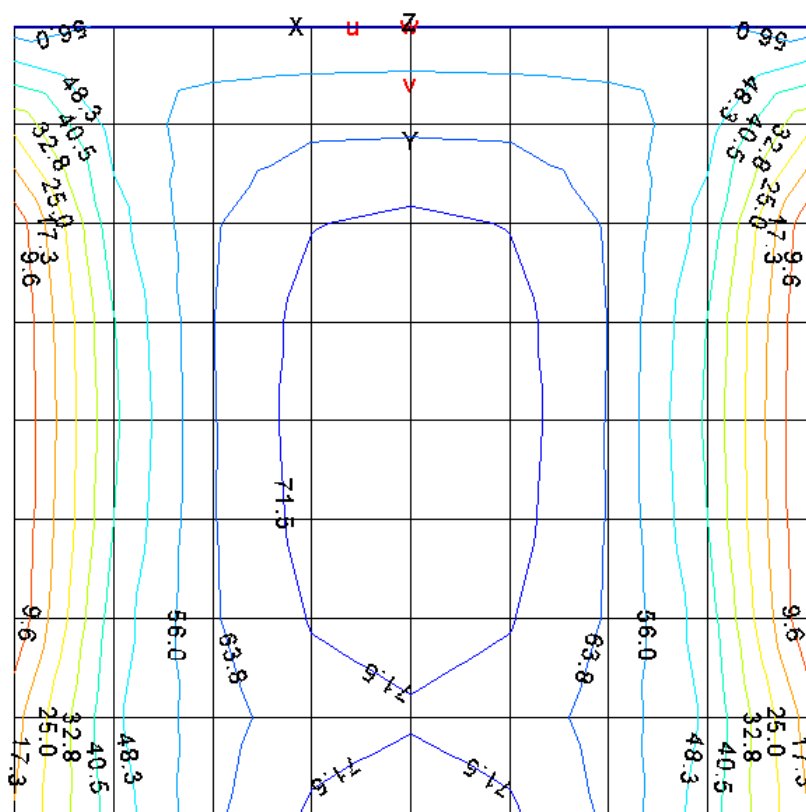


Рис. 4.29.3

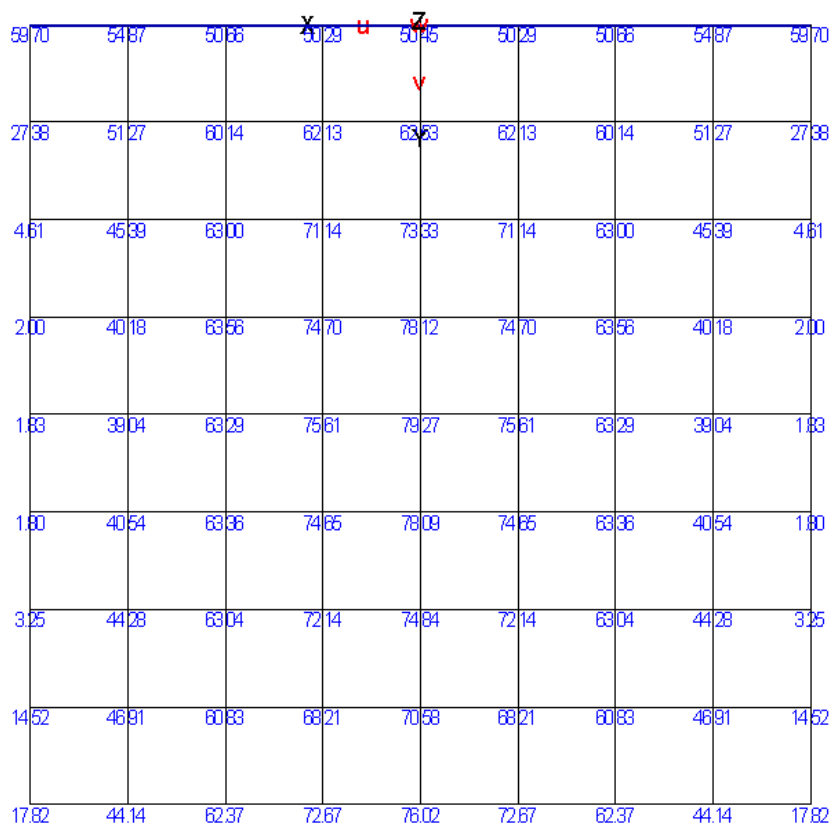


Рис. 4.29.4

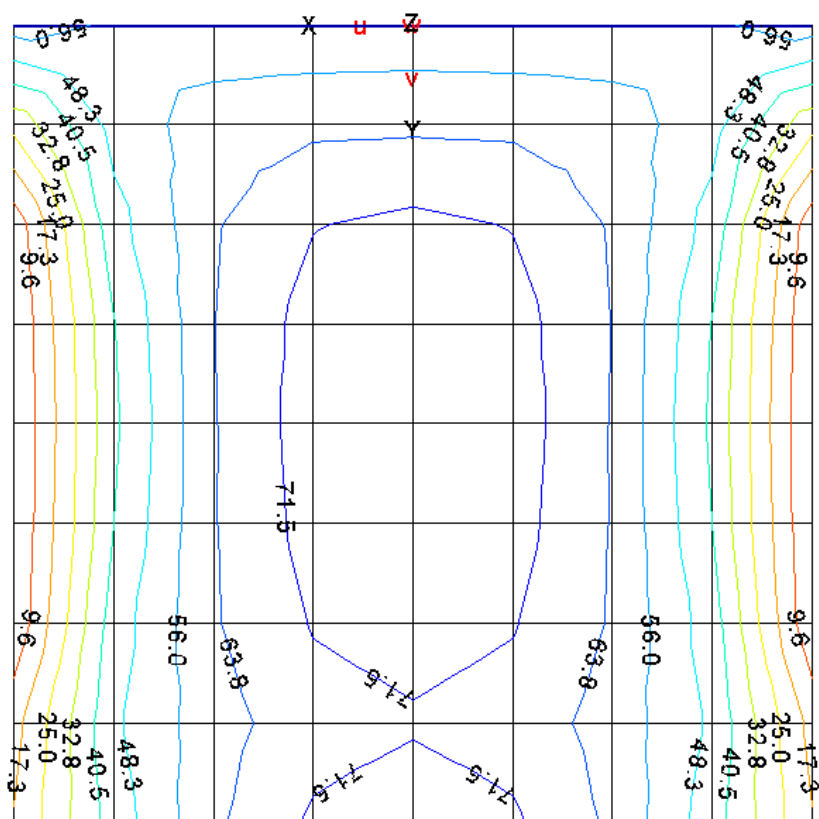


Рис. 4.29.5

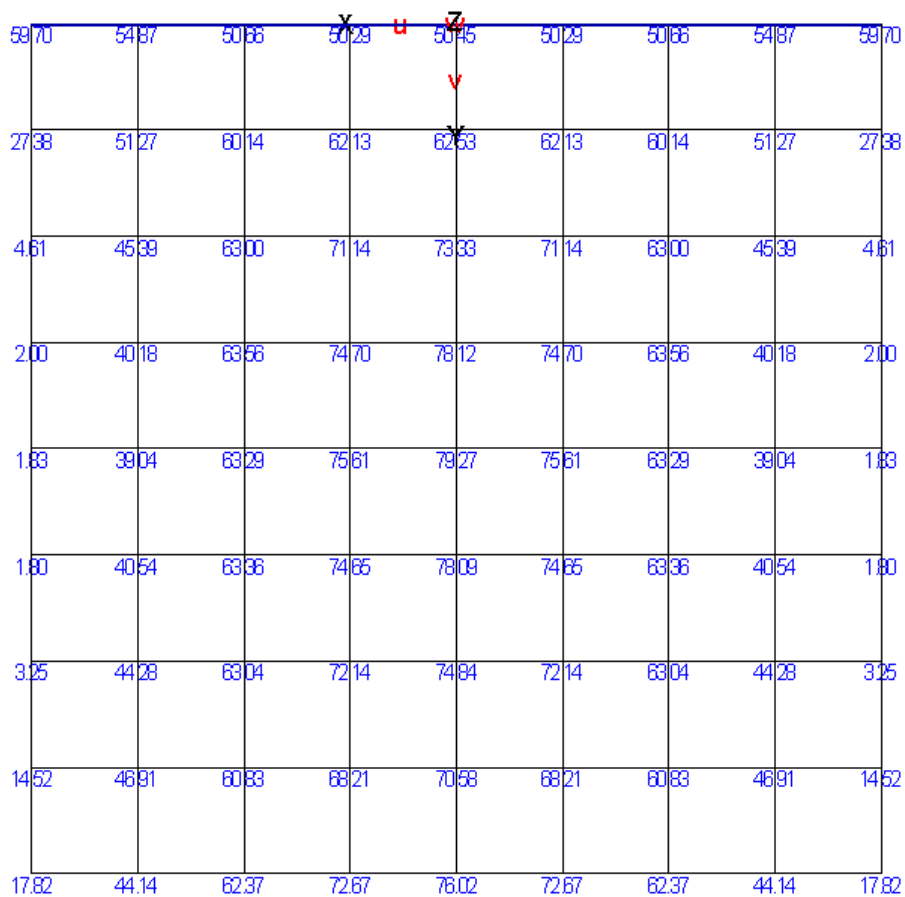


Рис. 4.29.5

Так как результаты для обоих вариантов практически одинаковы, дальнейший анализ проводим только для первого варианта расчетной схемы. В таблице 4.29.1 представлено сравнение результатов расчета площадей эпюры касательных напряжений $Q = \int_0^{16} \tau_{xy} h dx$ по горизонтальным сечениям пластины при $y = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ на соответствие значению горизонтальной реакции в точке А. В этой же таблице приведены нормализованные значения $\hat{h} = Q / H_A$. Как видно из таблицы, наблюдается замечательное соответствие между равнодействующей касательных напряжений по горизонтальным сечениям пластины и горизонтальной реакцией в точке А. Отметим, что даже при $y=0$ (т.е. в сечении совпадающем с точкой реакции) отличие составляет менее 3,5%.

Таблица 4.29.1

y	Q	H_A^I	\hat{h}
0	844	874	0.966
2	874	874	1.000
4	874	874	1.000
6	874	874	1.000
8	874	874	1.000
10	874	874	1.000
12	874	874	1.000
14	874	874	1.000

4.30 Цилиндрическая оболочка под внутренним давлением

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние свободной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления (рисунок 4.30.1). Источник [Roark R.J., Young W.C. Formulas for stress and strain. 5th edition. – New York: McGraw Hill, 1975.]

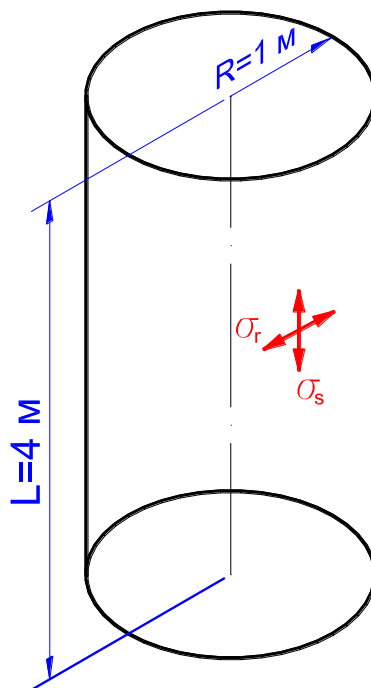


Рисунок 4.30.1

2. Формулировка задачи. Цилиндрическая оболочка без опор нагружается внутренним давлением p . Определить изменение радиуса и длины оболочки, а также напряжения в оболочке.

3. Исходные данные.

$E = 2.0 \cdot 10^8 \text{ кПа}$ - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$R = 1 \text{ м}$ - радиус оболочки;

$h = 0,02 \text{ м}$ - толщина оболочки;

$L = 4 \text{ м}$ - высота оболочки.

$p = 10 \text{ кН/м}^2$.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась полная оболочка с сеткой 20×16 (320 КЭ плоской оболочки, 340 узлов).

5. Результаты решения. В таблице 4.30.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением.

Таблица 4.30.1

Точка	Фактор	Эталон	MicroFe	Отклонение, %
Любая	σ_s , кПа	0	0.002	0.00
	σ_r , кПа	500.0	493.85	1.23
	δR , мм	$2.38 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	1.26
-	δL , мм	$-2.86 \cdot 10^{-3}$	$-2.82 \cdot 10^{-3}$	1.40

4.31 Короткая цилиндрическая оболочка под внутренним давлением

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние свободной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления (рисунок 4.31.1). Источник [С.П. Тимошенко. С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1963].

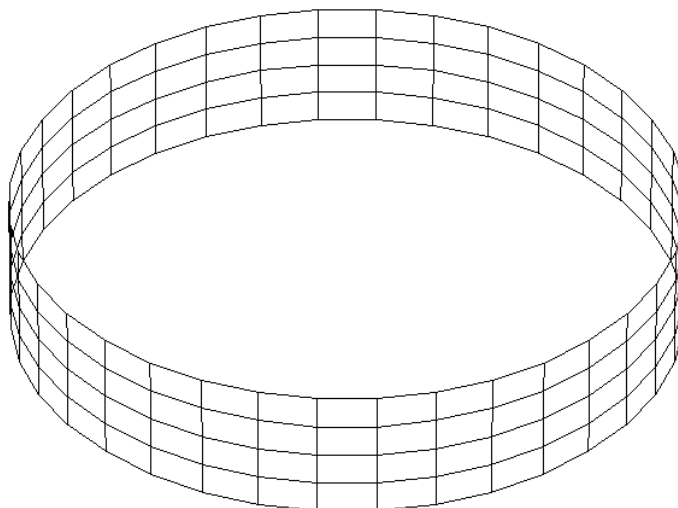


Рисунок 4.31.1

2. Формулировка задачи. Круглая цилиндрическая оболочка, свободно опертая по торцам, нагружается внутренним давлением p . Определить нормальное перемещение и изгибающий момент в точках срединного осевого сечения оболочки.

3. Исходные данные.

$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона;

$R = 10$ м - радиус оболочки;

$h = 0,275$ м - толщина оболочки;

$L = 4$ м - высота оболочки.

$p = 50$ кН/м².

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась полная оболочка с сеткой 4x36 (144 КЭ плоской оболочки, 180 узлов).

5. Результаты решения. В таблице 4.31.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с эталонным решением.

Таблица 4.31.1

Фактор	Эталон	MicroFe	Отклонение, %
w , мм	0.909	0.906	0.997
M_s , кНм	17.60	17.62	1.001

4.32 Цилиндрическая оболочка с заземленным краем под действием нагрузки, линейно изменяющейся вдоль образующей

1. Название задачи. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки, заземленной нижним краем под действием нагрузки, линейно изменяющейся вдоль образующей (рисунок 4.32.1).

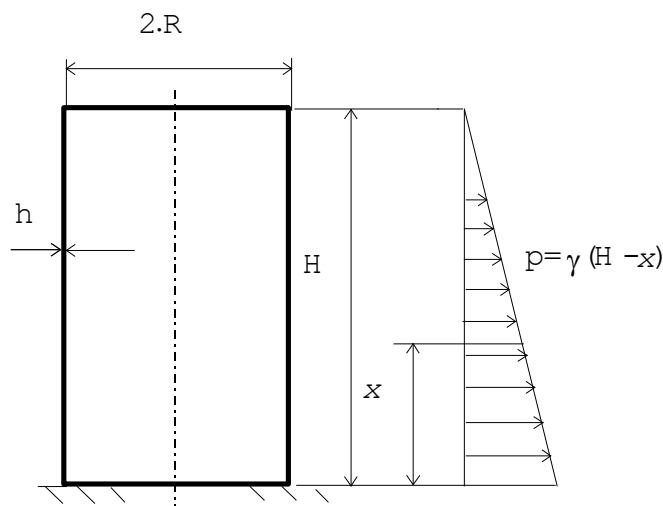


Рисунок 4.32.1

2. Формулировка задачи. Цилиндрическая оболочка нагружается давлением p , пропорциональным расстоянию до верхнего края. Определить перемещения w и изгибающие моменты M_1 и M_2 (в продольном и окружном направлении соответственно).

3. Исходные данные.

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$R = 1$ м - радиус оболочки;

$h = 0,005$ м - толщина оболочки;

$H = 5$ м - высота оболочки;

$\gamma = 10000$ кН/м³.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась $\frac{1}{4}$ часть оболочки, вырезанная плоскостями симметрии. При расчетах оболочка разбивалась на $n = 15$ конечных элементов в окружном направлении, в осевом направлении выделена зона краевого эффекта (1,5 м), количество точек деления для которой составляет $m = 50$ такое же количество точек деления принималось для участка оболочки, расположенного выше зоны краевого эффекта.

5. Подобласть верификации. Изгиб круговой цилиндрической оболочки под действием осесимметричной нагрузки в зоне краевого эффекта.

6. Аналитическое решение. Прогиб и изгибающие моменты определяются по формулам [С.П. Тимошенко. С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1963]:

$$w = \frac{\gamma}{4k^4 D} \left\{ e^{-kx} \left[\left(\frac{1}{k} - H \right) \sin kx - H \cdot \cos kx \right] + H - x \right\},$$

$$M_1 = -\frac{\gamma}{2k^2} e^{-kx} \left[H \cdot \sin kx + \left(\frac{1}{k} - H \right) \cos kx \right]; M_2 = \mu M_1,$$

Где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}.$$

7. Точность решения. В таблице 4.32.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением. На рисунках 4.32.2 и 4.32.3 показаны эпюры распределения изгибающих моментов в области краевого эффекта.

Таблица 4.32.1

Параметр	Теория	MicroFe
Максимальный прогиб w , мм	0,05043	0,0498
Изгибающие моменты в заделке		
M_1 , кН.м/м	74,82	68,5
M_2 , кН.м/м	22,45	20,5

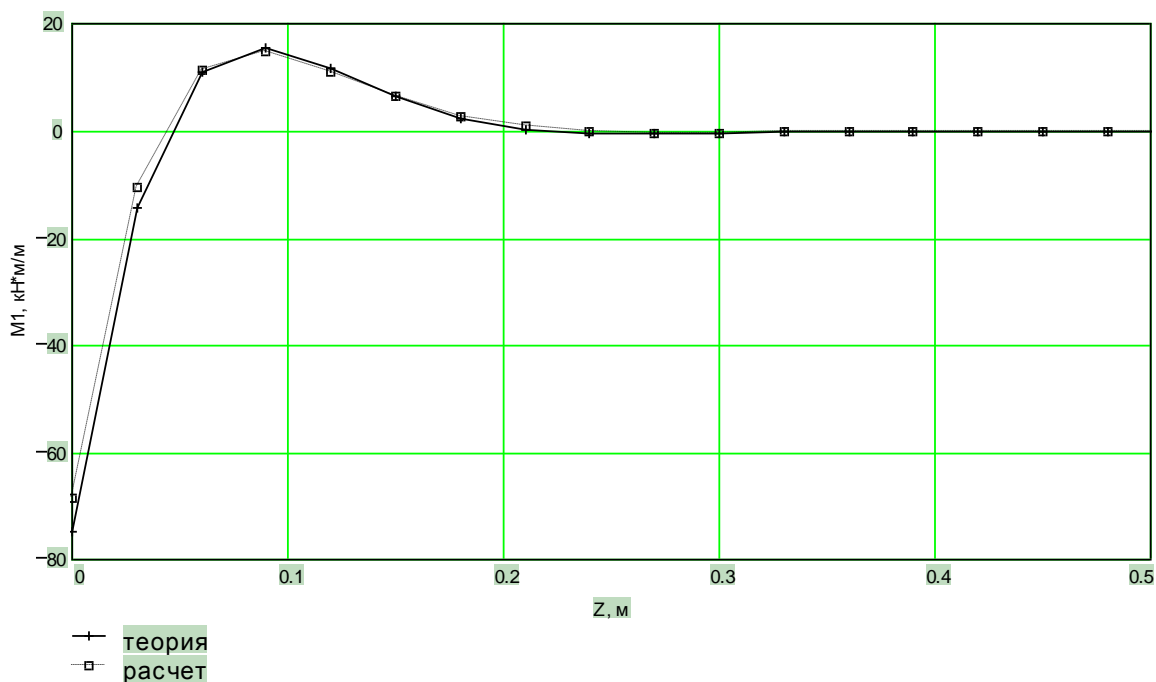


Рисунок 4.32.2

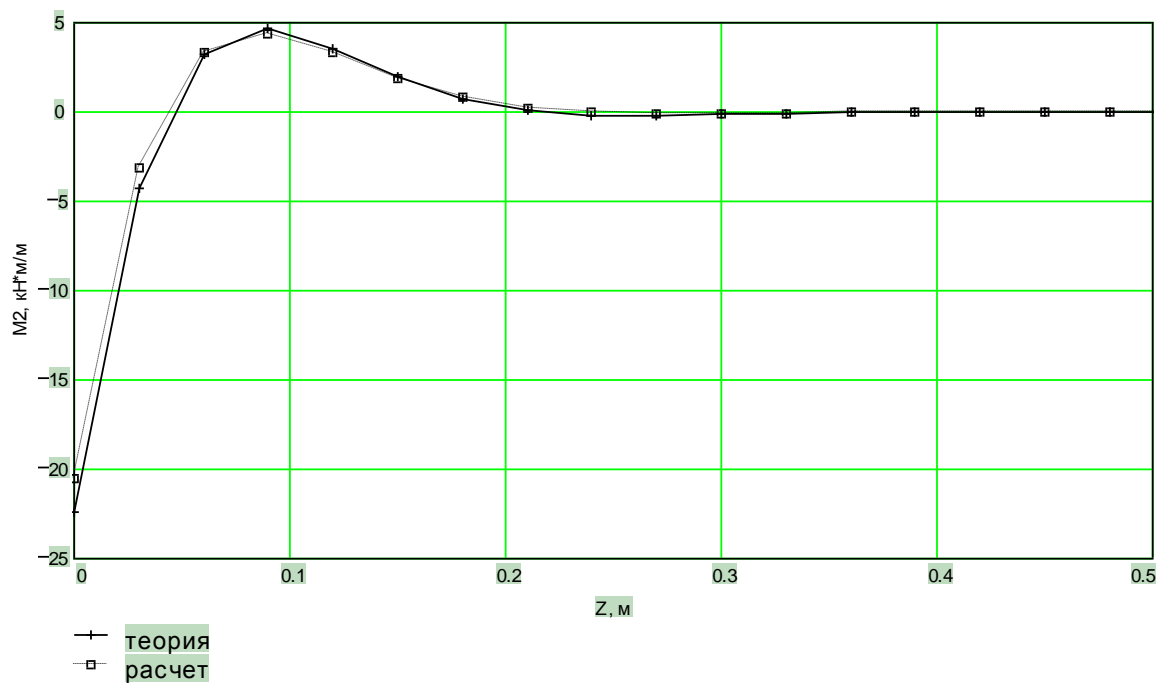


Рисунок 4.32.3

4.33 Определение температурных напряжений в круговой цилиндрической оболочке постоянной толщины

1. Условие задачи. Определить изгибающие моменты и напряжения в круговой цилиндрической оболочке постоянной толщины при изменении температуры в радиальном направлении по линейному закону.

2. Постановка задачи. Рассматривается заделанная по торцам круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины. Температура на внутренней поверхности оболочки t_1 , а температура на наружной поверхности оболочки t_2 .

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$R = 0.4$ м - радиус срединной поверхности оболочки,

$h = 0.01$ м - толщина оболочки,

$H = 2$ м - высота оболочки,

$\alpha = 15 \cdot 10^{-6}$ м·К⁻¹ - коэффициент линейного температурного расширения материала,

$\Delta T = t_1 - t_2 = 20$ С° - разность температур между поверхностями оболочки,

$t_1 = -t_2 = 10$ С° ,

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель. Оболочка разбивалась на 720 четырехузловых оболочечных элементов.

5. Подобласть верификации. Напряженно состояние в круговой цилиндрической оболочке постоянной толщины при температурном нагружении.

6. Аналитическое решение. Формула для изгибающего момента в заделанной по торцам круговой цилиндрической оболочке, при изменении температуры по толщине по линейному закону имеет следующий вид [С.П. Тимошенко. С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1963]

$$M = D \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot (1 + \mu)}{h}.$$

Наибольшие температурные напряжения равны

$$\sigma = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot E}{2 \cdot (1 - \mu)}.$$

7. Точность решения. Сравнение результатов по программе с аналитическими решениями представлено в таблице 4.33.1.

Таблица 4.33.1

Параметр	Теория	MicroFe
Изгибающий момент, кН·м/м	7.14	7.14
Наибольшие температурные напряжения, МПа	42.86	42.86

4.34 Пространственная пластинчатая система

1. Название задачи. Напряженное состояние пластины с двумя ребрами, шарнирно опертой в крайних точках ребер, от действия равномерно распределенной нагрузки, приложенной в плоскости ребер (рисунок 4.34.1). Источник [А.В. Александров, Б.Я.Лашеников, Н.Н.Шапошников. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. - М.: Стройиздат, 1983].

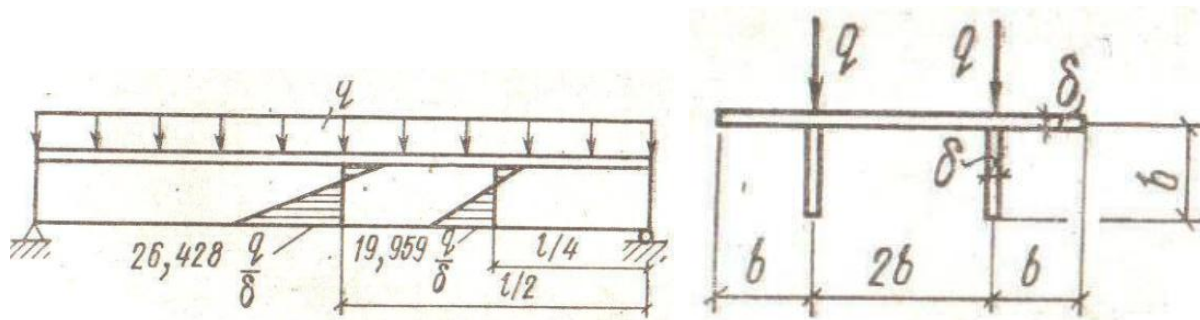


Рис. 4.34.1

2. Формулировка задачи. Прямоугольная пластина с двумя ребрами, шарнирно опертая в крайних точках ребер, нагружается равномерно распределенной нагрузкой, приложенной в плоскости ребер. Ребра расположены на расстоянии 1м от краев плиты, толщина плиты и ребер одинакова. Определить нормальные напряжения в точках у края плиты, над ребром, посередине плиты и в нижней точке ребра для сечений $x=L/2$ и $x=L/4$.

3. Исходные данные.

$E = 3.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости плиты и ребер;

$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона плиты и ребер;

$B = 4$ м - ширина плиты;

$b = 1$ м - высота ребер

$\delta = 0,1$ м - толщина плиты и ребер;

$L = 7,85$ м - длина плиты и ребер.

$p = 10$ кН/м².

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались 4 варианта расчетной схемы. В 1-м варианте расчетная схема состоит только из КЭ плоской оболочки - сетка 4x4 для плиты и 1x4 для ребер (24 КЭ плоской оболочки, 35 узлов). Во 2-м варианте расчетная схема состоит из КЭ плоской оболочки для плиты- сетка 4x4, а ребра представлены стержневыми элементами, ось которых расположена ниже срединной плоскости плиты на $e = 0.525$ м – такие элементы в MicroFe называем подбалками (16 КЭ плоской оболочки, 8 пространственных стержневых КЭ, 25- узлов). 3-й вариант расчетной схемы аналогичен 1-му варианту с более мелким разбиением - сетка 8x20 для плиты и 2x20 для ребер (240 КЭ плоской оболочки, 273 узла). 4-й вариант

4.35 Пространственная коробчато-пластинчатая система

1. Название задачи. Искривленная коробчатая пространственная система из пластинок шарнирно оперта в крайних точках на торцах, под действием сосредоточенной силы (рис. 4.35.1-4.35.3). Источник [Kanoknukulchai W., A simple and efficient finite element for general shell analysis. Int. J. Num. Meth. Engng, 1979, Vol.14, pp.179-200., A.R.M. Fam and C. Turkstra, "Model study of horizontally curved box girder", J. Engng Struct. Div., ASCE, 102, st5, 1097-1108 (1976)].

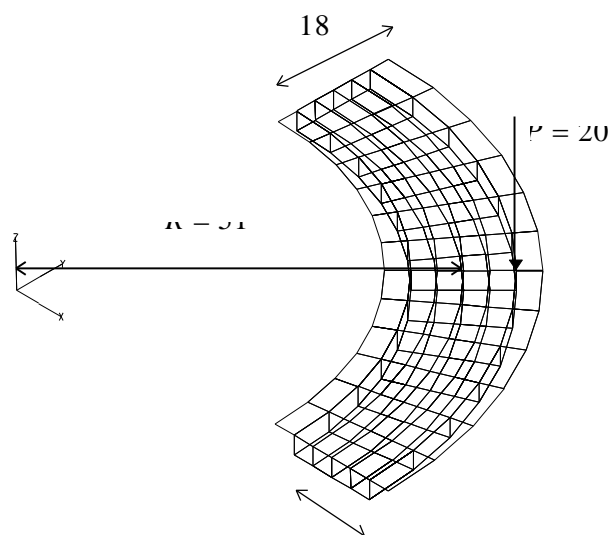


Рис. 4.35.1

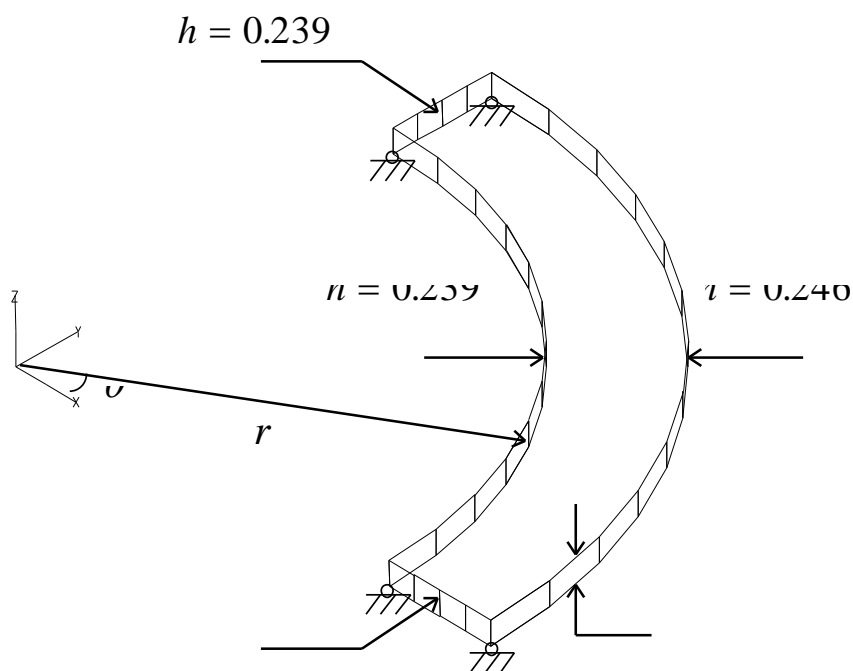


Рис. 4.35.2

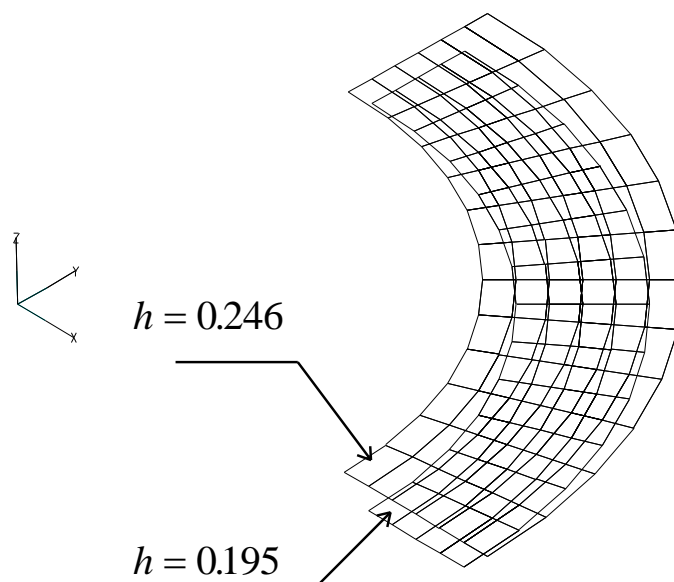


Рис. 4.35.3

2. Формулировка задачи. Для показанной на рис. 4.35.1-4.35.3 пространственной системы определить вертикальные перемещения нижней кромки внутренней ($r = 45$) и внешней ($r = 57$) стенок, а также тангенциальные напряжения σ_θ на внешней поверхности нижней пластинки при $r = 51$.

3. Исходные данные.

$E = 4.0 \cdot 10^5$ кПа - модуль упругости пластинок;

$\mu = 0.36$ - коэффициент Пуассона;

$\mathbf{P} = 20$ кН.

Все геометрические размеры и толщины пластинок приведены на рис. 4.35.1-4.35.3.

4. Конечноэлементная модель. Расчетная схема состоит из 152 КЭ плоской оболочки, 156 узлов и приведена на рис. 4.35.1-4.35.3.

5. Результаты решения. На рис. 4.35.4 приведены графики значений вертикальных перемещений нижней кромки внутренней ($r = 45$) и внешней ($r = 57$) стенок. На рис. 4.35.5 приводятся графики значений тангенциального напряжения σ_θ на внешней поверхности нижней пластины при $r = 51$. На обоих рисунках по оси x откладывается угол θ в градусах. Через EQ обозначены результаты расчета по MicroFe.

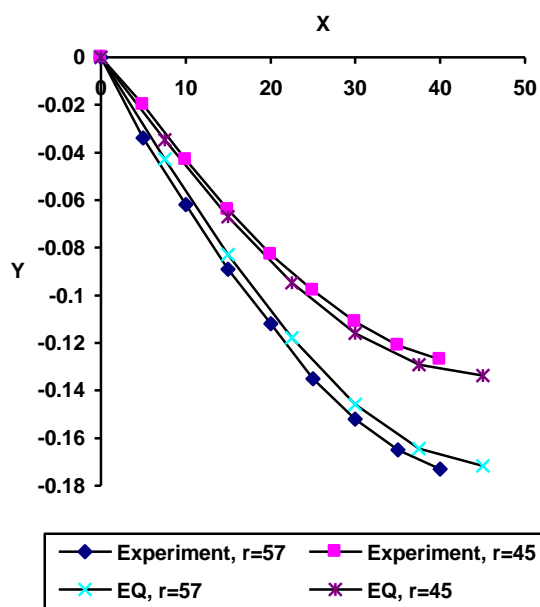


Рис. 4.35.4

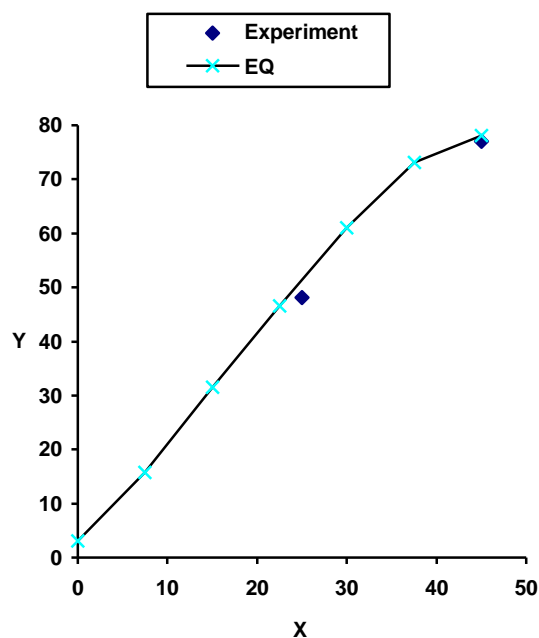


Рис. 4.35.5

4.36 Толстая квадратная плита защемленная по контуру

1. Название задачи. Толстая жестко защемленная по контуру плита квадратная в плане, выполненная из изотропного линейно упругого материала, при действии одностороннего равномерно распределенного давления. (рис. 4.36.1). Источник [Лисицын Б.М. Расчет защемленных плит в постановке пространственной теории упругости. –Прикладная механика.– 1970.– т. 6.– вып.5.– с.18-23.].

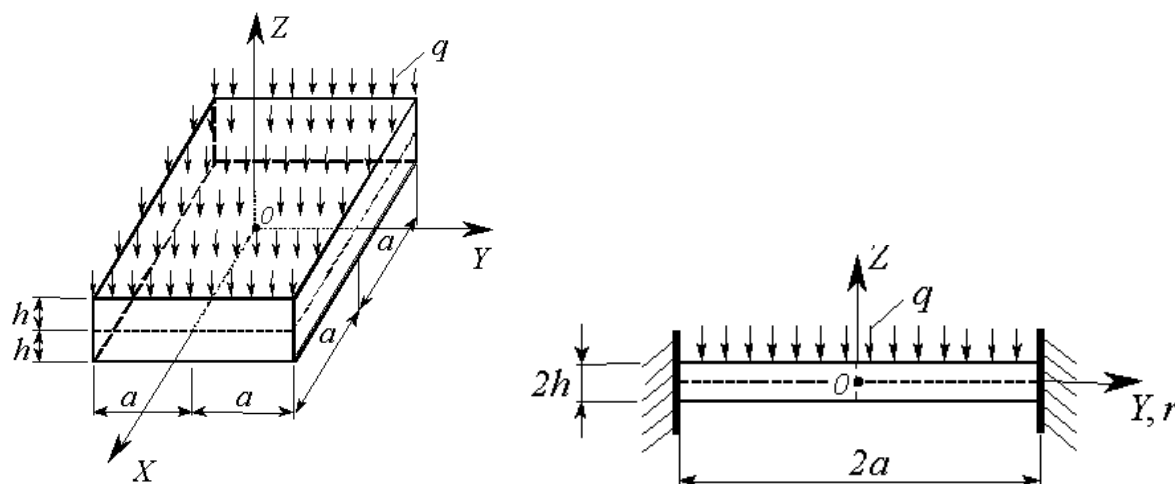


Рис. 4.36.1

2. Формулировка задачи. Толстая жестко защемленная по контуру плита квадратная в плане, выполненная из изотропного линейно упругого материала, при действии одностороннего равномерно распределенного давления. Определить вертикальные перемещения в центре плиты, нормальные напряжения σ_x , σ_z в центре плиты и нормальные напряжения σ_x^* в точках защемленных граней для $Z/h = 1.0, 0.5, 0.0, -0.5$ и -1.0 при $\gamma = a/h = 2$ и 5 .

3. Исходные данные.

$E = 1.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости плиты;

$\mu = 0.25$ - коэффициент Пуассона плиты;

$2a = 20$ м - ширина и длина плиты;

$2h = 10$ м и 4 м - толщина плиты

$q = 10$ кН/м².

4. Конечноеэлементная модель. Рассматривались расчетные схемы состоящие только из объемных КЭ теории упругости - сетка $0.5 \times 0.5 \times 0.5$ м для плиты толщиной 10 м (по толщине плиты 20 КЭ) и сетка $0.2 \times 0.2 \times 0.2$ м для плиты толщиной 4 м (по толщине плиты 20 КЭ).

5. Результаты решения. В таблицах 4.36.1- 4.36.4 представлено сравнение результатов расчета для перемещений и нормальных напряжений по программе с эталонным решением для случая $\gamma = a/h = 2$. В таблицах 4.36.5- 4.36.8 представлено сравнение результатов расчета для перемещений и нормальных напряжений по программе с эталонным решением для случая $\gamma = a/h = 5$. В таблицах 4.36.1- 4.36.5 приведены безразмерные значения wE/qa , в таблицах 4.36.2- 4.36.6 приведены безразмерные значения σ_z/q , в таблицах 4.36.3- 4.36.7 приведены безразмерные значения σ_x/q , а в таблицах 4.36.4- 4.36.8 приведены безразмерные значения σ_x^*/q . Как следует из этих таблиц, для всех точек, имеем хорошее соответствие и перемещений и напряжений с аналитическим решением. Следует отметить, что эталонное решение [Лисицын Б.М. Расчет защемленных плит в постановке пространственной теории упругости. –Прикладная механика.– 1970.– т. 6.– вып.5.– с.18-23.] является приближенным. Это хорошо видно для напряжений σ_z , на верхней поверхности плиты это напряжение должно равняться q , а на нижней поверхности – 0. Результаты, полученные в MicroFe ближе к этим значениям, чем эталонное решение.

Таблица 4.36.1 ($\gamma = a/h = 2, wE/qa$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-1.336	-1,398	0.956
0.5	-1.186	-1,193	0.994
0.0	-1.046	-1,068	0.979
-0.5	-0.958	-0,965	0.993
-1.0	-0.894	-0,893	1.001

Таблица 4.36.2 ($\gamma = a/h = 2, \sigma_z/q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-0.996	-1,032	0.965
0.5	-0.858	-0,843	1.018
0.0	-0.564	-0,521	1.083
-0.5	-0.173	-0,177	0.977
-1.0	-0.005	0,041	---

Таблица 4.36.3 ($\gamma = a/h = 2, \sigma_x/q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-1.000	-1,242	0.805
0.5	-0.455	-0,585	0.778
0.0	-0.142	-0,149	0.953
-0.5	0.165	0,256	0.644
-1.0	0.666	0,845	0.788

Таблица 4.36.4 ($\gamma = a/h = 2, \sigma_x^*/q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	3.049	3,815	0.799
0.5	-0.138	0,076	---
0.0	-0.223	-0,562	0.397
-0.5	-0.275	-0,688	0.400
-1.0	-1.804	-2,396	0.753

Таблица 4.36.5 ($\gamma = a/h = 5, wE/qa$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-5.785	-5,723	1.011
0.5	-5.832	-5,794	1.007
0.0	-5.815	-5,729	1.015
-0.5	-5.749	-5,459	1.053
-1.0	-5.616	-5,414	1.037

Таблица 4.36.6 ($\gamma = a/h = 5, \sigma_z/q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-0.996	-0,993	1.003
0.5	-0.841	-0,859	0.979
0.0	-0.537	-0,491	1.094
-0.5	-0.158	-0,162	0.975
-1.0	-0.004	-0,010	---

Таблица 4.36.7 ($\gamma = a/h = 5, \sigma_x/q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-3.828	-4,150	0.922
0.5	-1.887	-2,031	0.929
0.0	-0.170	-0,048	---
-0.5	1.572	1,750	0.898
-1.0	3.513	3,825	0.918

Таблица 4.36.8 ($\gamma = a/h = 5, \sigma_x^*/q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	12.27	10,37	1.183
0.5	2.022	3,446	0.587
0.0	-0.261	-0,016	---
-0.5	-2.466	-3,096	0.797
-1.0	-11.11	-9,899	1.122

4.37 Толстая круглая плита защемленная по контуру

1. Название задачи. Толстая жестко защемленная по контуру плита круглая в плане, выполненная из изотропного линейно упругого материала, при действии одностороннего равномерно распределенного давления. (рис. 4.37.1). Источник [Лисицын Б.М. Расчет защемленных плит в постановке пространственной теории упругости. –Прикладная механика.– 1970.– т. 6.– вып.5.– с.18-23.]

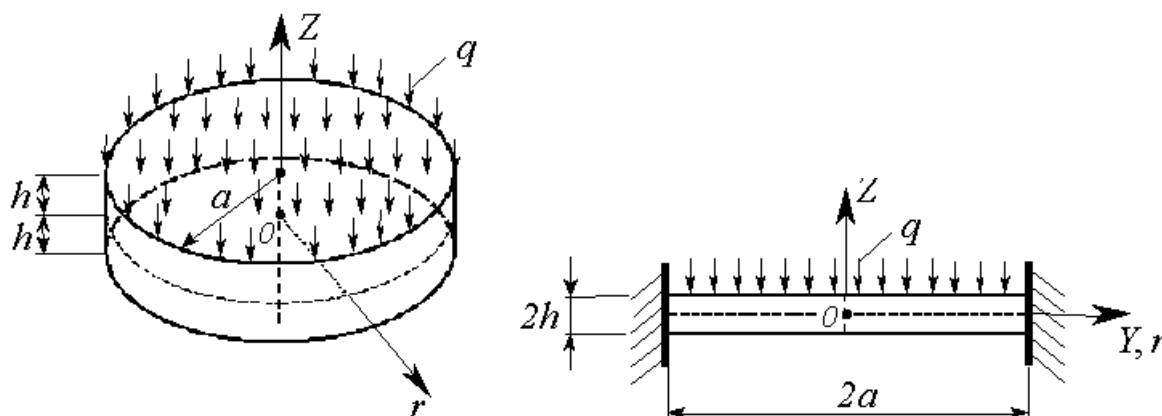


Рис. 4.37.1

2. Формулировка задачи. Толстая жестко защемленная по контуру плита круглая в плане, выполненная из изотропного линейно упругого материала, при действии одностороннего равномерно распределенного давления. Определить вертикальные перемещения в центре плиты, нормальные напряжения σ_r , σ_z в центре плиты и нормальные напряжения σ_r^* в точках защемленных граней для $Z/h = 1.0, 0.5, 0.0, -0.5$ и -1.0 при $\gamma = a/h = 2$ и 5 .

3. Исходные данные.

- $E = 1.0 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости плиты;
- $\mu = 0.25$ - коэффициент Пуассона плиты;
- $2r = 20$ м - диаметр плиты;
- $2h = 10$ м и 4 м - толщина плиты
- $q = 10$ кН/м².

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались расчетные схемы состоящие только из объемных КЭ теории упругости - сетка $0.5 \times 0.5 \times 0.5$ м для плиты толщиной 10 м (по толщине плиты 20 КЭ) и сетка $0.5 \times 0.5 \times 0.5$ м для плиты толщиной 4 м (по толщине плиты 8 КЭ).

5. Результаты решения. В таблицах 4.37.1- 4.37.4 представлено сравнение результатов расчета для перемещений и нормальных напряжений по программе с эталонным решением для случая $\gamma = a/h = 2$. В таблицах 4.37.5- 4.37.8 представлено сравнение результатов расчета для перемещений и нормальных напряжений по программе с эталонным решением

для случая $\gamma = a/h = 5$. В таблицах 4.37.1- 4.37.5 приведены безразмерные значения wE/qa , в таблицах 4.37.2- 4.37.6 приведены безразмерные значения σ_z/q , в таблицах 4.37.3- 4.37.7 приведены безразмерные значения σ_r/q , а в таблицах 4.37.4- 4.37.8 приведены безразмерные значения σ_r^*/q . Как следует из этих таблиц, для всех точек, имеем хорошее соответствие и перемещений и напряжений с аналитическим решением. Следует отметить, что эталонное решение [Лисицын Б.М. Расчет защемленных плит в постановке пространственной теории упругости. –Прикладная механика.– 1970.– т. 6.– вып.5.– с.18-23.] является приближенным. Это хорошо видно для напряжений σ_z , на верхней поверхности плиты это напряжение должно равняться q , а на нижней поверхности – 0. Результаты, полученные в MicroFe ближе к этим значениям, чем эталонное решение.

Таблица 4.37.1 ($\gamma = a/h = 2, wE/qa$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-1.149	-1,156	0.994
0.5	-0.991	-0,990	1.001
0.0	-0.846	-0,848	0.998
-0.5	-0.760	-0,760	1.000
-1.0	-0.704	-0,709	0.993

Таблица 4.37.2 ($\gamma = a/h = 2, \sigma_z/q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-0.997	-1,113	0.896
0.5	-0.861	-0,839	1.026
0.0	-0.532	-0,534	0.996
-0.5	-0.176	-0,180	0.978
-1.0	-0.005	0,096	---

Таблица 4.37.3 ($\gamma = a/h = 2, \sigma_r / q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-0.926	-1,036	0.894
0.5	-0.409	-0,395	1.035
0.0	-0.120	-0,131	0.916
-0.5	0.125	0,133	0.940
-1.0	0.572	0,531	1.077

Таблица 4.37.4 ($\gamma = a/h = 2, \sigma_r^* / q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	2,377	2,432	0.977
0.5	-0.165	-0,282	0.585
0.0	-0.200	-0,164	1.220
-0.5	-0.216	-0,241	0.896
-1.0	-1.231	-1,403	0.877

Таблица 4.37.5 ($\gamma = a/h = 5, wE / qa$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-4.506	-4,558	0.989
0.5	-4.536	-4,575	0.991
0.0	-4.513	-4,543	0.993
-0.5	-4.451	-4,489	0.991
-1.0	-4.337	-4,382	0.990

Таблица 4.37.6 ($\gamma = a/h = 5, \sigma_z / q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-0.975	-1,107	0.881
0.5	-0.830	-0,935	0.888
0.0	-0.500	-0,488	1.025
-0.5	-0.170	-0,116	1.466
-1.0	-0.025	0,108	---

Таблица 4.37.7 ($\gamma = a/h = 5, \sigma_r / q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	-3.338	-3,634	0.919
0.5	-1.642	-1,499	1.095
0.0	-0.156	-0,151	1.033
-0.5	1.329	1,202	1.106
-1.0	3.026	3,209	0.943

Таблица 4.37.8 ($\gamma = a/h = 5, \sigma_r^* / q$)

Z/h	MicroFe	Эталон	Отклонение
1.0	6.108	5,939	1.028
0.5	1.265	1,544	0.819
0.0	-0.217	-0,268	0.810
-0.5	-1.664	-1,803	0.923
-1.0	-5.708	-5,866	0.973

4.38 Разрезное кольцо

1. Название и формулировка задачи. Разрезное кольцо средним радиусом $R = 20 \text{ см}$ квадратного поперечного сечения $1 \times 1 \text{ см}^2$, нагруженное на свободном конце сосредоточенной силой $P = 10^{-5} \text{ Н}$. Модуль упругости и коэффициент Пуассона материала равны $E = 0,1 \text{ МПа}$ и $\nu = 0$. (рис. 4.38.1). Источник [Метод конечных элементов в механике твердых тел./ Под редакцией А.С. Сахарова, И Альтенбаха.–Киев.: Вища Школа; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982.–480 с.]. Требуется определить вертикальное перемещение в точке приложения сосредоточенной силы

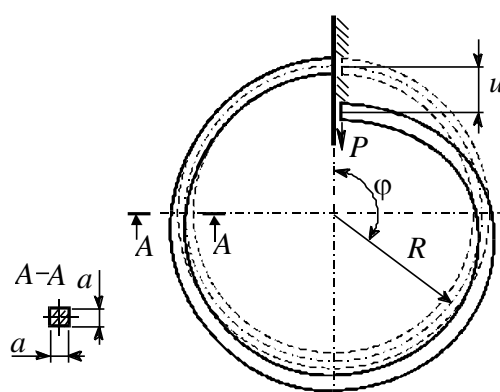


Рис. 4.38.1

2. Конечноэлементная модель. Рассматривались три расчетные схемы: 1-я схема - стержневая - состоит из 160 стержневых конечных элементов и 161 узла; 2-я схема - оболочечная - состоит из 640 КЭ плоской оболочки и 805 узлов (по толщине кольца 4x1 КЭ); 3-я схема - объемная - состоит из 2560 объемных КЭ теории упругости и 4025 узлов (по толщине кольца 4x4 КЭ).

5. Результаты решения. В таблицах 4.38.1 представлено сравнение результатов расчета для перемещений по программе с эталонным решением. В качестве эталонного принималось $u = P \frac{\pi R^3}{EJ} = 0,3016 \text{ см}$. Как следует из таблицы, имеем хорошее соответствие перемещения и напряжений с эталонным решением.

Таблица 4.38.1

	Стержневая РС	Оболочечная РС	Объемная РС
1.0	0.3016	0.2961	0.2937
Эталон	0.3016	0.3016	0.3016
Погрешность, %	0.00	1.82	2.62

5 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ)

5.1 Свободные колебания изогнутого пространственного стержня

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний изогнутого пространственного стержня.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Защемленный в точках А и В пространственный изогнутый стержень (рис. 5.1.1). Определить: собственные частоты и формы колебаний.

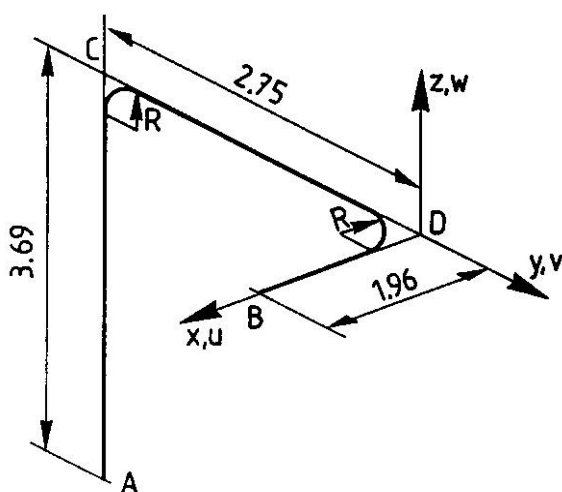


Рис.5.1.1

3. Исходные данные.

$A=0.3439 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ - площадь;

$I_Y=I_Z=0.1377 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ - моменты инерции (прямые элементы);

$I_Y=I_Z=0.5887 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ - моменты инерции (изогнутые элементы);

$R=0.922 \text{ м}$ - радиус изгиба;

$E = 1.658 \cdot 10^8 \text{ кПа}$ - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$\rho = 13.404106 \text{ т/м}^3$ - плотность.

4. Конечноэлементная модель. Стержень разбивался на 42 конечных элемента «3D-стержень».

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний пространственного стержня.

6. Сопоставление результатов. В таблице 5.1.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с результатами аналитического решения [Hovgaard W. Stress in three dimensional pipe-bends. *Transactions of ASME*, vol. 57, FSP 75–12. PP. 401-416].

Таблица 5.1.1

№ формы	Эталон, Гц	MicroFe, Гц
1	10.18	10.16
2	19.54	19.37
3	25.47	25.47
4	48.09	46.93
5	52.86	53.15
6	75.94	82.47
7	80.11	88.38
8	122.34	122.8
9	123.15	133.7

5.2 Свободные колебания квадратной пластины опертой по контуру

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний квадратной изотропной пластины, опертой по контуру.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. квадратная изотропная шарнирно опертая по контуру пластина постоянной толщины. Определить: собственные частоты и формы колебаний.

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$\rho = 7,959 \cdot 10^3$ кг/м³ - плотность материала пластины,

$a_x = 10$ м - длина пластины,

$a_y = 10$ м - ширина пластины,

$h = 0.1$ м - толщина пластины,

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель пластины представлена на рисунке 5.2.1. Пластина разбивалась на 225 четырехузловых элементов.

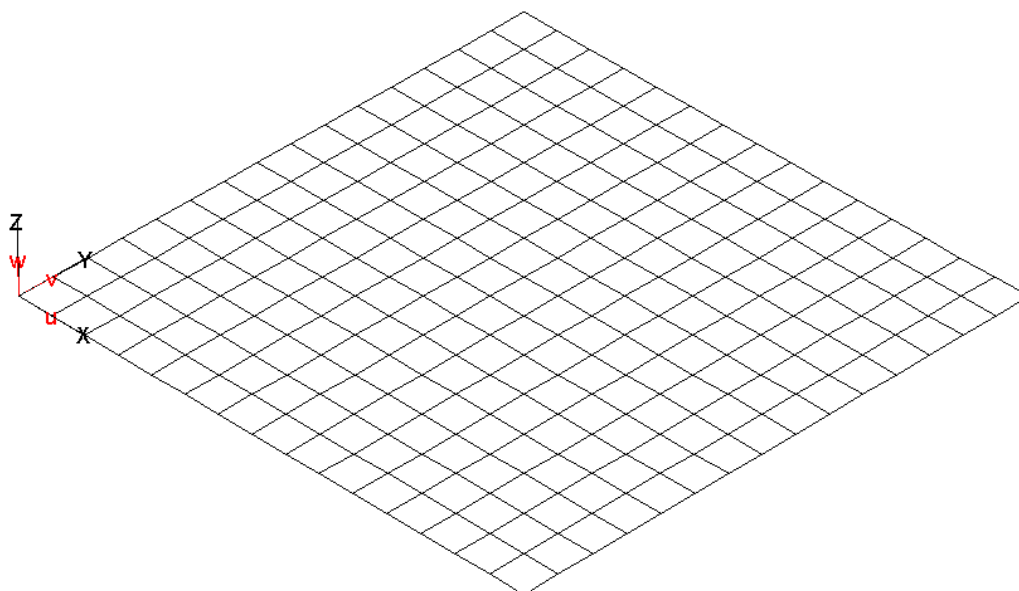


Рисунок 5.2.1

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний прямоугольной пластины постоянной толщины.

6. Аналитическое решение. Собственные частоты пластины вычисляются по формуле [Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1, Под ред. В.В. Болотина, изд.2-ое, М., Машиностроение, 1999]

$$\omega_{n,m} = \pi^2 \cdot \left[\left(\frac{n}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{m}{a_y} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}}$$

7. Точность решения. Значения собственных частот колебаний, определенных по программе и их сравнение с аналитическими решениями представлено в таблице 5.2.1.

Таблица 5.2.1

№ тона	Эталон	MicroFe
1	4.77	4.76
2	11.92	11.92
3	19.07	19.04
4	23.83	23.88
5	30.99	30.96
6	40.53	40.70
7	42.91	42.82
8	47.68	47.74
9	59.59	59.52
10	61.98	62.51

5.3 Свободные изгибные колебания прямоугольной пластины опертой по контуру

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний прямоугольной изотропной пластины, опертой по контуру.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Прямоугольная изотропная шарнирно опертая по контуру пластина постоянной толщины. Определить: собственные частоты и формы колебаний.

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ - плотность материала пластины,

$a_x = 1.5$ м - длина пластины,

$a_y = 1.0$ м - ширина пластины,

$h = 0.01$ м - толщина пластины,

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель пластины представлена на рисунке 5.3.1. Пластина разбивалась на 96 четырехузловых элементов.

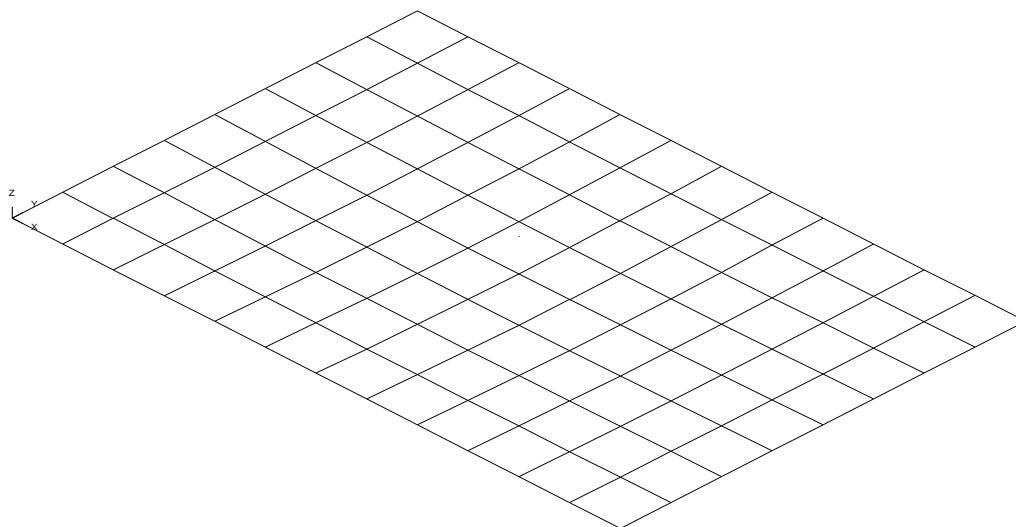


Рисунок 5.3.1

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний прямоугольной пластины постоянной толщины.

6. Аналитическое решение. Собственные частоты пластины вычисляются по формуле [Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1, Под ред. В.В. Болотина, изд.2-ое, М., Машиностроение, 1999]

$$\omega_{n,m} = \pi^2 \cdot \left[\left(\frac{n}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{m}{a_y} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}}.$$

7. Точность решения. Значения собственных частот колебаний, определенных по программе и их сравнение с аналитическими решениями представлено в таблице 5.3.1. На рисунках 5.3.1-5.3.2 представлены формы колебаний пластинки.

Таблица 5.3.1

Собственные частоты прямоугольной пластинки				
№	n	m	Эталон	MicroFe
1	1	1	218.45	218.46
2	2	1	420.10	420.15
3	1	2	672.16	672.08
4	3	1	756.18	756.24
5	2	2	873.81	873.09
6	3	2	1209.9	1210.8

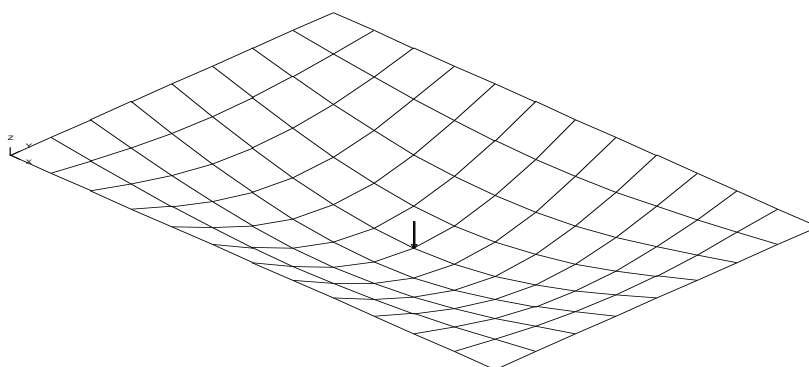


Рисунок 5.3.1

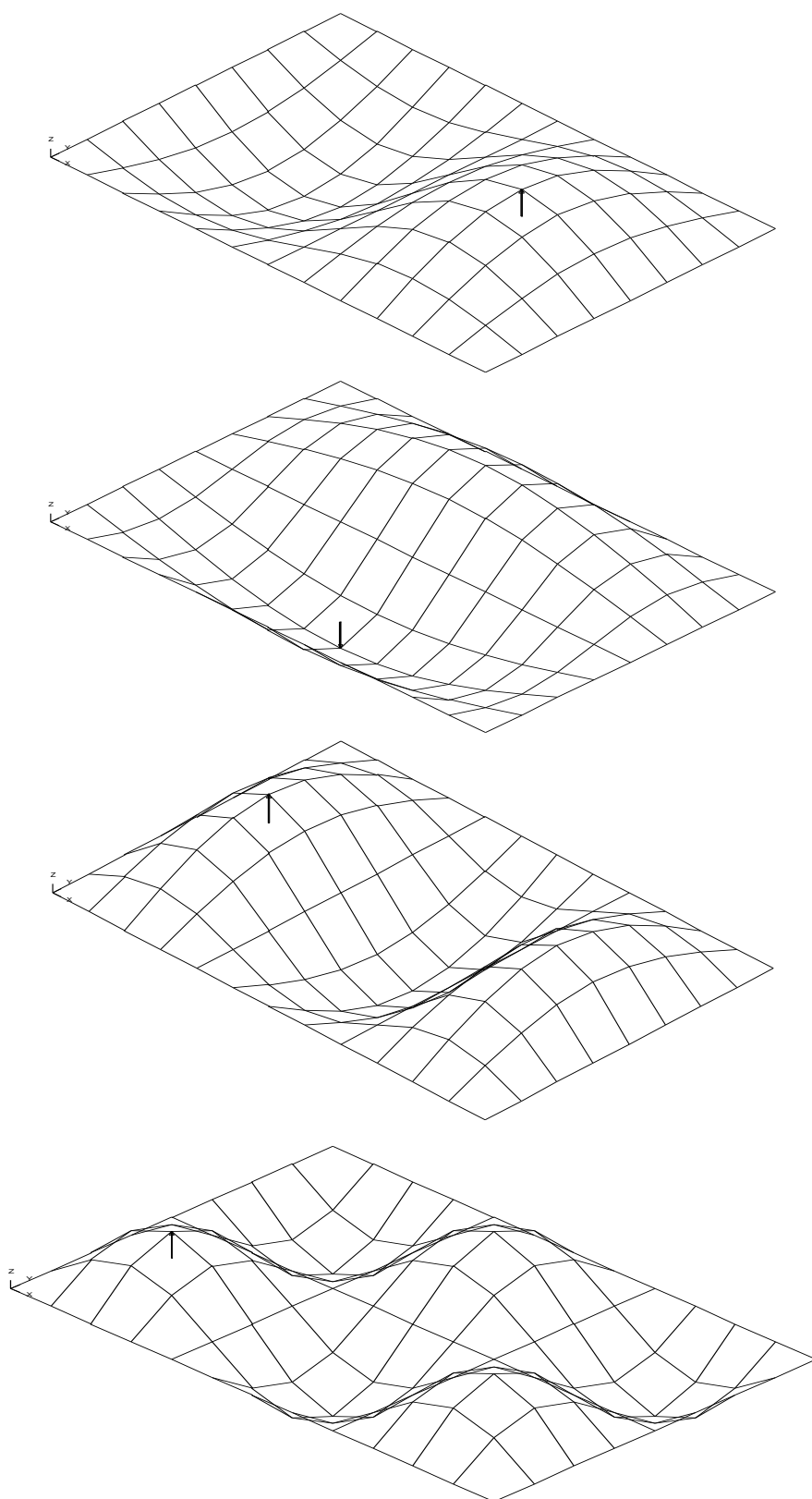


Рисунок 5.3.2

5.4 Свободные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний квадратной изотропной пластины, защемленной по контуру.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная изотропная защемленная по контуру пластина постоянной толщины. Определить: собственные частоты.

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ - плотность материала пластины,

$a_x = a_y = 1.5$ м - сторона пластины,

$h = 0.01$ м - толщина пластины,

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель. Пластина разбивалась на 144 четырехузловых элемента.

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний квадратной пластины постоянной толщины, защемленной по контуру.

6. Задача об определении частот и форм колебаний защемленной по контуру прямоугольной пластинки не поддается решению в аналитическом виде и может быть решена лишь приближенными методами. Приближенные значения частоты собственных колебаний прямоугольной пластинки вычисляются по формуле [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. - М.: Машиностроение, 1968.]

$$\omega_{n,m} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h} \left[\left(\frac{A_m}{a_x} \right)^4 + \left(\frac{A_n}{a_y} \right)^4 + 2 \frac{B_m \cdot B_n}{(a_x \cdot a_y)^2} \right]},$$

где

$$A_m = \begin{cases} 1.506 & (m = 1) \\ m + 0.5 & (m \geq 2) \end{cases}$$

$$B_m = \begin{cases} 1.248 & (m = 1) \\ A_m \cdot \left(A_m - \frac{2}{\pi} \right) & (m \geq 2) \end{cases}$$

7. Точность решения. Сравнение значений собственных частот колебаний, определенных по программе с приближенными значениями, вычисленными по формуле, представлено в таблице 5.4.1.

Таблица 5.4.1

Собственные частоты заземленной квадратной пластинки				
№	n	m	Эталон	MicroFe
1	1	1	246.08	245.25
2	2	1	502.25	500.28
3	1	2	502.25	500.28
4	2	2	740.99	738.63
5	3	2	902.35	896.58
6	1	3	902.35	900.59

5.5 Свободные колебания квадратной консольной пластины

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний квадратной изотропной пластины, опертой по контуру.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная изотропная пластина постоянной толщины жестко закреплена по одному краю. Определить: собственные частоты и формы колебаний.

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,

$\rho = 7,959 \cdot 10^3$ кг/м³ - плотность материала пластины,

$a_x = 10$ м - длина пластины,

$a_y = 10$ м - ширина пластины,

$h = 0.1$ м - толщина пластины,

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель пластины представлена на рисунке 5.5.1. Пластина разбивалась на 225 четырехузловых элементов.

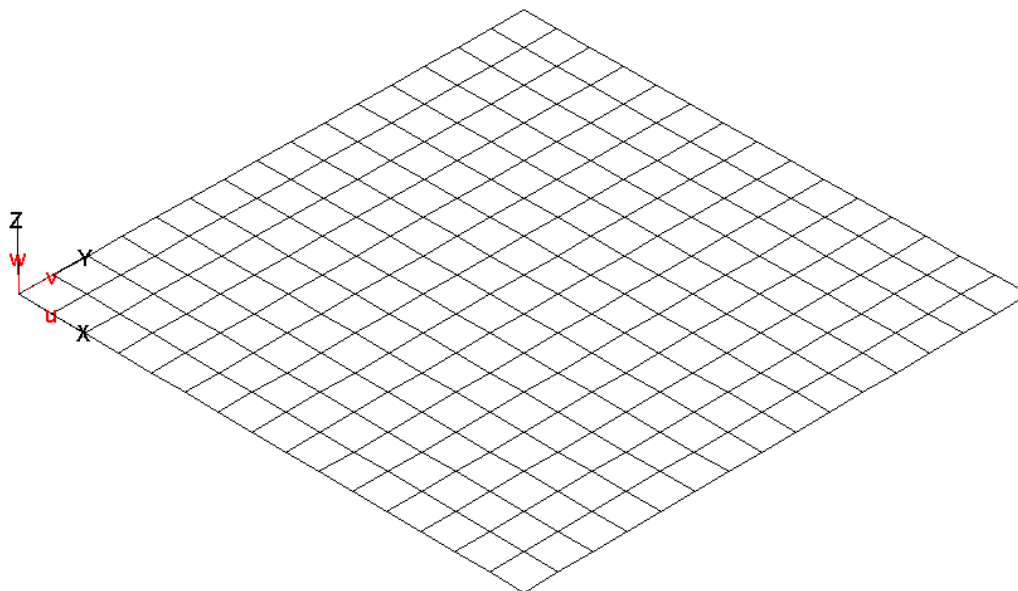


Рисунок 5.5.1

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний прямоугольной пластины постоянной толщины.

6. Аналитическое решение. Собственные частоты пластины вычисляются по формуле [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968.]

$$\omega = \omega_* a^{-2} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}},$$

где ω_* определяется по таблице 7.

7. Точность решения. Значения собственных частот колебаний, определенных по программе и их сравнение с аналитическими решениями представлено в таблице 5.5.1.

Таблица 5.5.1

№ тона	Эталон	MicroFe
1	0.84	0.84
2	2.06	2.05
3	5.18	5.14
4	6.63	6.56
5	7.53	7.45

5.6 Свободные колебания круглой защемленной пластины постоянной толщины

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний круглой защемленной пластины постоянной толщины.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Круглая защемленная по контуру пластина постоянной толщины. Определить: собственные частоты и формы колебаний.

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,
 $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
 $\rho = 7.8$ т/м³ - плотность материала пластины,
 $R = 1.5$ м - радиус пластины,
 $h = 0.02$ м - толщина пластины,

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель пластины представлена на рисунке 5.6.1.

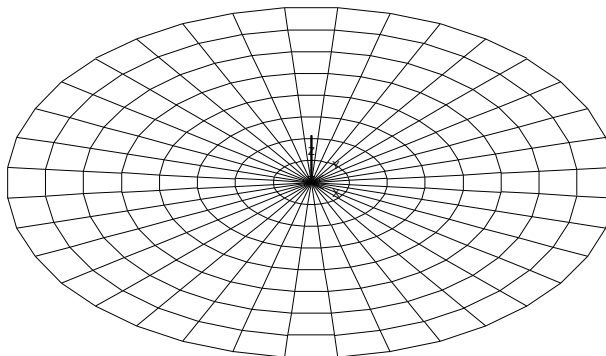


Рисунок 5.6.1

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний прямоугольной пластины постоянной толщины.

6. Аналитическое решение. Собственные частоты пластины вычисляются по формуле [Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1, Под ред. В.В. Болотина, изд.2-ое, М., Машиностроение, 1999]

$$\omega_{mn} = \frac{\kappa_{mn}^2}{R^2} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}},$$

7. Точность решения. Значения собственных частот колебаний, определенных по программе и их сравнение с аналитическими решениями представлено в таблице 5.6.1. На рисунке 5.6.2 представлены формы колебаний пластинки для $m = 0, n = 0$ и $m = 0, n = 1$.

Таблица 5.6.1

Число узловых окружностей	Число узловых диаметров							
	n = 0		n = 1		n = 2		n = 3	
	Эталон	MicroFe	Эталон	MicroFe	Эталон	MicroFe	Эталон	MicroFe
m = 0	139.1	139.3	289.6	289.9	475.1	475.5	695.1	695.4
m = 1	541.6	542.6	828.4	830.0	1152.0	1154.0	1513.1	1542.0
m = 2	1213.5	1218.0	1636.1	1642.0	2094.2	2102.0	2590.0	2597
m = 3	2155.5	2168	2711.6	2707	3306.1	3299	3936.2	3958

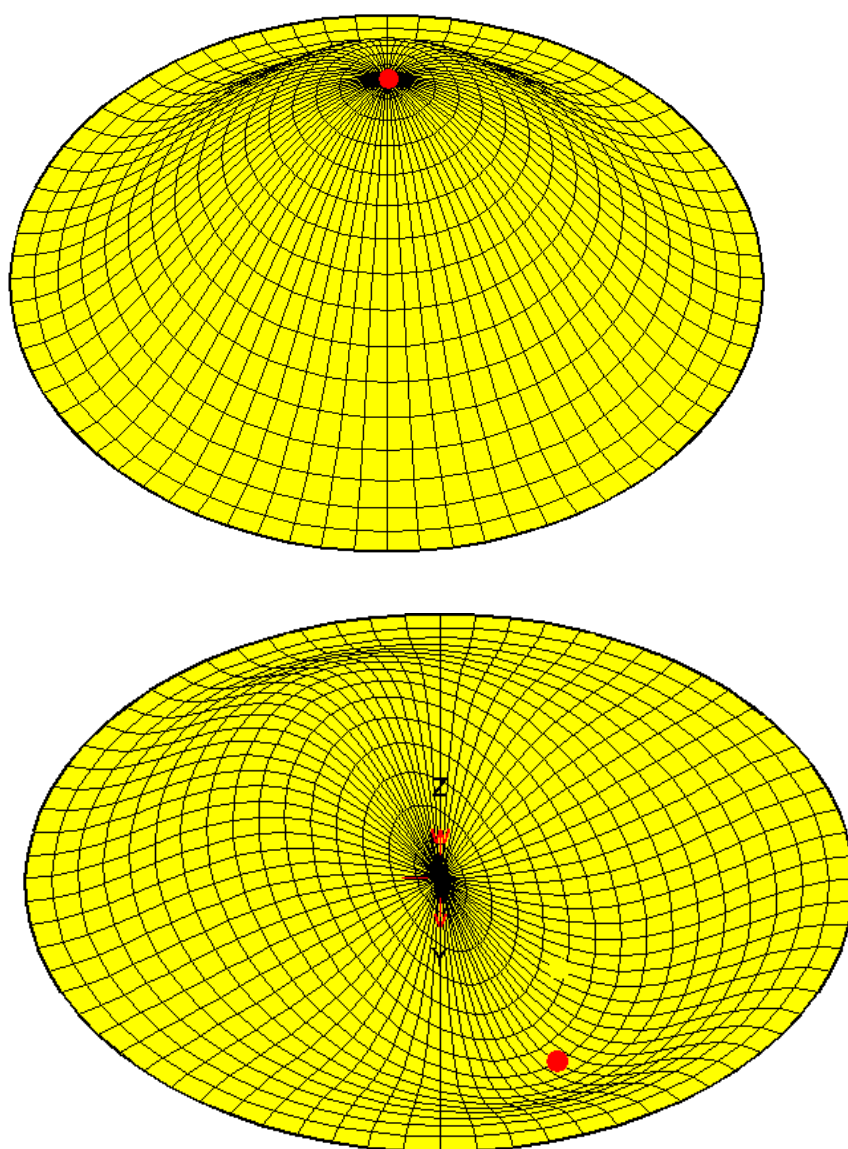


Рисунок 5.6.2

5.7 Свободные колебания круглой опертой по контуру пластины постоянной толщины

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний круглой опертой по контуру пластины постоянной толщины.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Круглая опертая по контуру пластина постоянной толщины. Определить: собственные частоты и формы колебаний.

3. Исходные данные

$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости,
 $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона,
 $\rho = 7.8$ т/м³ - плотность материала пластины,
 $R = 1.5$ м - радиус пластины,
 $h = 0.02$ м - толщина пластины,

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

4. Конечноэлементная модель пластины представлена на рисунке 5.7.1.

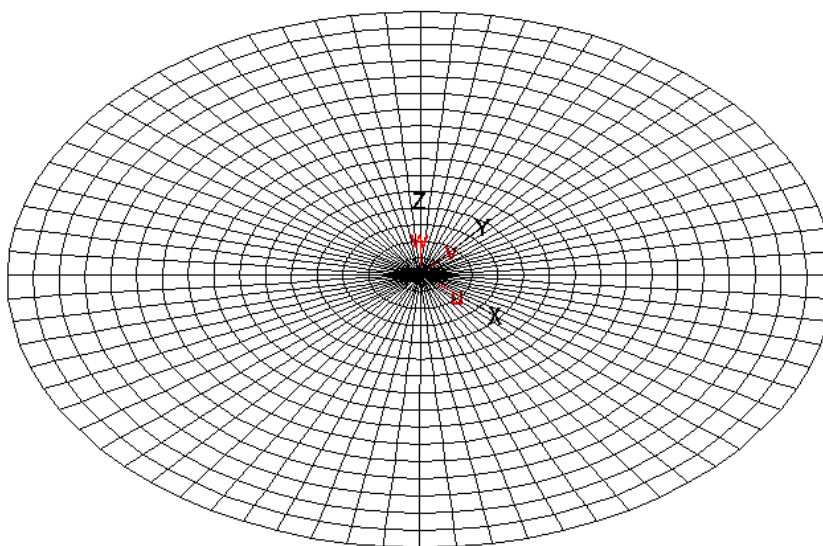


Рисунок 5.7.1

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний прямоугольной пластины постоянной толщины.

6. Аналитическое решение. Собственные частоты пластины вычисляются по формуле [Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1, Под ред. В.В. Болотина, изд.2-ое, М., Машиностроение, 1999]

$$\omega_{mn} = \frac{\kappa_{mn}^2}{R^2} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}},$$

7. Точность решения. Значения собственных частот колебаний, определенных по программе и их сравнение с аналитическими решениями представлено в таблице 5.7.1. На рисунке 5.7.2 представлены формы колебаний пластинки для $m = 0, n = 0$ и $m = 2, n = 2$.

Таблица 5.7.1

Число узловых окружностей	Число узловых диаметров					
	n = 0		n = 1		n = 2	
	Эталон	MicroFe	Эталон	MicroFe	Эталон	MicroFe
m = 0	67,8	67,2	189,8	189,2	349,4	348,4
m = 1	405,3	405,0	660,7	660,5	955,3	954,8
m = 2	1010,6	1012,0	1400,1	1403,0	1829,5	1832

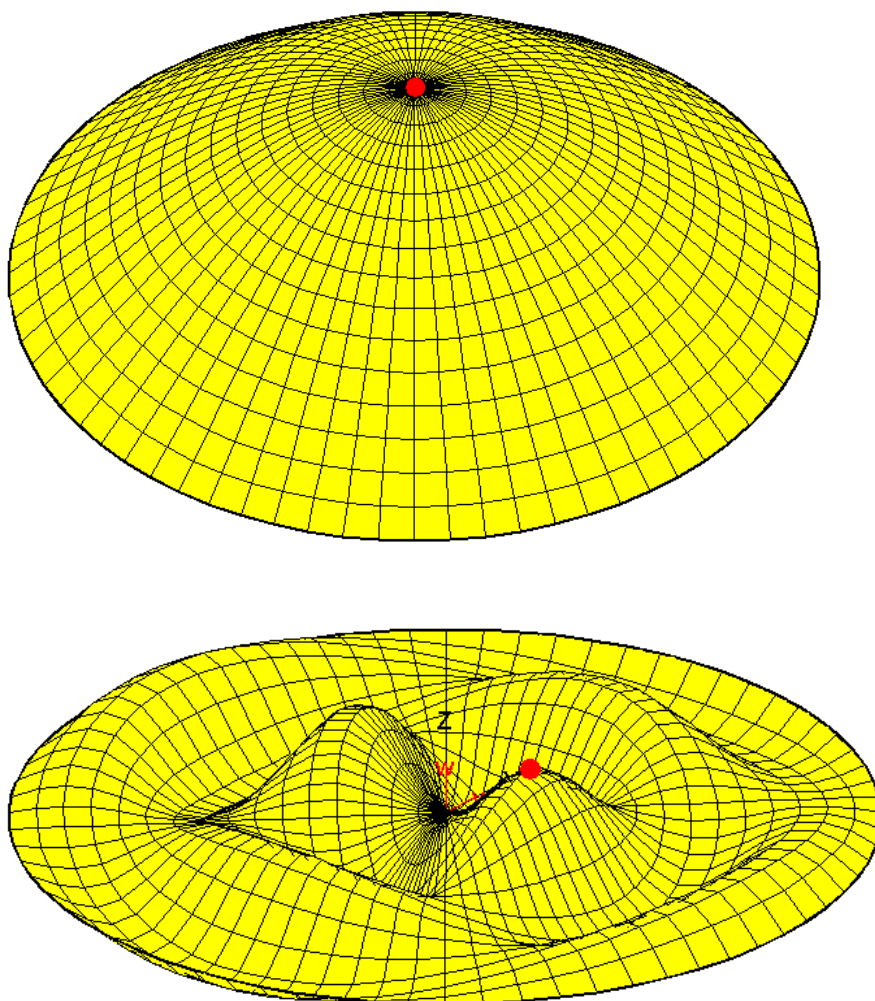


Рисунок 5.7.2

5.8 Свободные колебания заземленной по торцам круговой цилиндрической оболочки

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний круглой цилиндрической оболочки постоянной толщины.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Заземленная по торцам круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины. Определить: собственные частоты и формы колебаний.

3. Исходные данные.

$l = 0,305$ м - длина оболочки

$R = 0,076$ м - радиус оболочки;

$h = 0,25 \cdot 10^{-3}$ м - толщина оболочки;

$E = 1,96 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$\rho = 7,7 \cdot 10^3$ кг/м³ - плотность материала оболочки.

4. Конечноэлементная модель. Оболочка разбивалась на 80 конечных элементов в окружном направлении и 40 в осевом.

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины.

6. Аналитическое решение [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968.].

7. Точность решения. В таблице 5.8.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с аналитическим решением и результатами эксперимента [Weingarten V.I. Free vibration of thin cylindrical shells. AIAA Journal, vol. 2, n. 4, 1964.]. В таблице f, m - число волн в продольном и окружном направлении; в скобках указаны результаты различных экспериментов.

Таблица 5.8.1

f (m)	Частоты колебаний, Гц		
	Эталон	Эксперимент	MicroFe
1 (3)	1140	--	1138
1 (4)	755	700	752
1 (5)	574	(545) (559)	567
1 (6)	533	525	522
1 (7)	593	(587) (598)	580
1 (8)	717	720	702
1 (9)	881	885	865
1 (10)	1075	(1090) (1100)	1059
1 (11)	1295	1310	1278
2 (3)	2505	--	2508
2 (4)	1731	1620	1731
2 (5)	1272	1210	1269
2 (6)	1011	980	1005
2 (7)	898	(838)(875)	888
2 (8)	903	900	891
2 (9)	996	995	981
2 (10)	1151	(1135) (1145)	1135
2 (11)	1348	1365	1332

5.9 Свободные колебания консольной цилиндрической панели

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний консольной цилиндрической панели постоянной толщины.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Защемленная по криволинейной грани цилиндрическая панель постоянной толщины (рис. 5.9.1). Определить: собственные частоты и формы колебаний.

3. Исходные данные.

$L = 0,3048$ м - длина прямолинейных граней панели;

$S = 0,3048$ м - длина криволинейных граней панели;

$R = 0,6096$ м - радиус кривизны панели;

$h = 0,003048$ м - толщина панели;

$E = 2 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$\rho = 7,04 \cdot 10^3$ кг/м³ - плотность материала оболочки.

4. Конечноэлементная модель. Оболочка разбивалась на 100 конечных элементов (сетка 10x10).

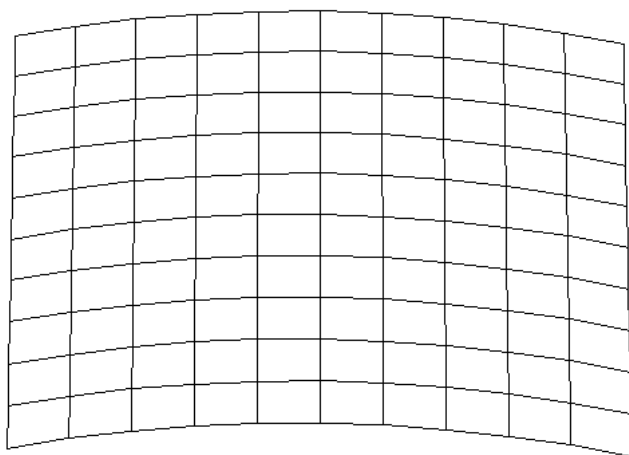


Рис.5.9.1

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний консольной цилиндрической панели постоянной толщины.

6. Сопоставление результатов. В таблице 5.9.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с результатами эксперимента [Olson M.D., Lindberg G.M. Vibration analysis of cantilevered curves plates, using a new cylindrical shell finite element., Proc. of 2nd Conf. math. Meth. Struct. Mech., AF base Wright. Petterson, Ohio, 1968], [Cower G.R., Lindberg G.M., Olson M.D. a shallow shell finite element of triangular shape., Int. J. Solids and Structures, 1970, V.6, N8].

Таблица 5.9.1

№ тона	Эксперимент, Гц	MicroFe, Гц
1	85,60	88,96
2	134,50	141,9
3	258,90	260,1
4	350,60	353,9
5	395,20	404,3

5.10 Свободные колебания цилиндрической пружины

1. Название задачи. Определение собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины с заземленными концами.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Защемленная по концам цилиндрическая пружина постоянного сечения (рис. 5.10.1). Определить: собственные частоты и формы колебаний.

3. Исходные данные.

- $K = 4$ - количество витков пружины;
 $\psi = 10^\circ$ - угол подъема;
 $R = 1$ м - радиус пружины по оси проволоки;
 $d = 0,1$ м - диаметр проволоки;
 $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости;
 $\mu = 0,3$ - коэффициент Пуассона;
 $\rho = 7,85$ т/м³ - плотность материала проволоки.

4. Конечноэлементная модель. Пружина представлялась в виде 640 стержневых конечных элементов.

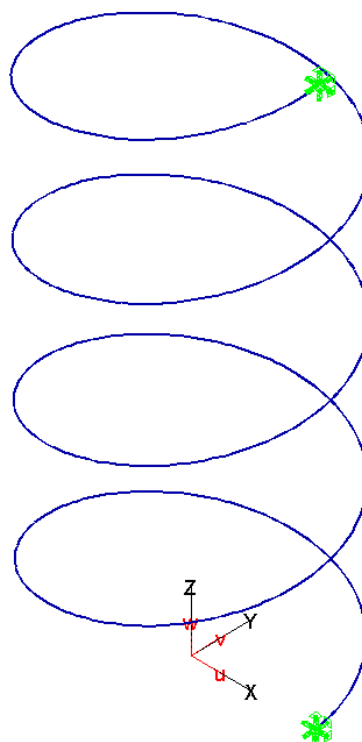


Рис.5.10.1

5. Подобласть верификации. Собственные частоты и формы колебаний цилиндрической пружины.

6. Сопоставление результатов. В таблице 5.10.1 представлено сравнение результатов расчета собственных частот по программе с эталоном [Грудев И.Д. Колебания криволинейных стержней. М., Изд-во “МИК”, 2007].

Таблица 5.10.1

№ тона	MicroFe, рад/сек	Эталон, рад/сек
1	12.97	13.0612
2	15.14	15.1885
3	15.31	15.3056
4	16.12	16.1846
5	24.54	24.7097
6	27.46	27.5372
7	28.59	28.6370
8	29.86	29.9473

5.11 Расчет фермы на действие мгновенного импульса

1. Название задачи. Определение собственных частот фермы и отклика во времени перемещения масс от действия мгновенного импульса.

2. Постановка задачи. Ферма, имеющая одинаковые площади поперечных сечений, за исключением крайней стойки, площадь поперечного сечения которой в два раза больше, представлена на рисунке 5.11.1. В нижних промежуточных узлах фермы расположены сосредоточенные массы. В начальный момент времени скорость промежуточных не опорных узлов фермы равна V_0 . Определить собственные частоты и перемещения масс во времени.

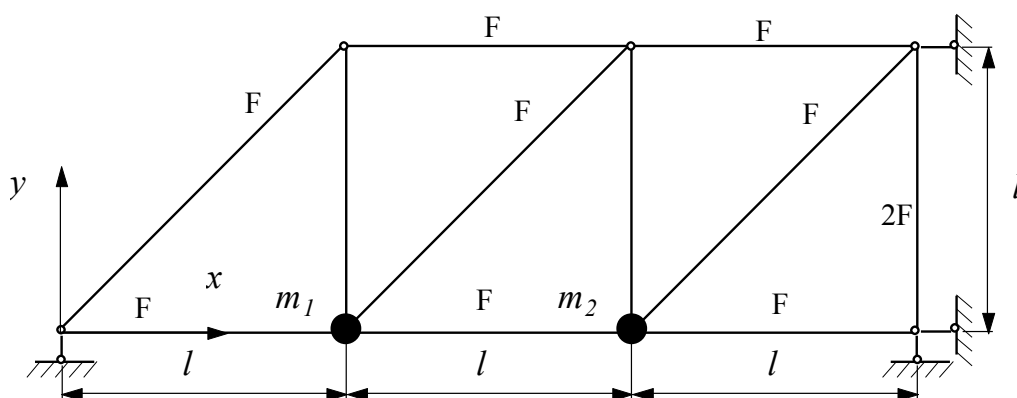


Рисунок 5.11.1

Основные прочностные характеристики:

Материал балки:

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,

Поперечное сечение балки:

$F = 0.1$ м² - площадь поперечного сечения,

$l = 2$ м - панель и высота фермы ,

$m_1 = m_2 = 1000$ кг - сосредоточенные массы,

$V_0 = 1$ м - скорость промежуточных узлов фермы при $t = 0$.

3. Конечноэлементная модель. При расчете ферма описывалась 11 элементами типа 2D балок.

4. Результаты расчета сравниваются с аналитическими результатами, полученными по соотношениям, представленным в [И.М. Рабинович, А.П. Сеницын, О.В. Лужин, Б.М. Теренин. Расчет сооружений на импульсные воздействия. -М.: Стройиздат, 1970.].

Результаты расчетов собственных частот колебаний и их сравнение с аналитическим представлены в таблице 5.11.1.

Таблица 5.11.1

№ п/п	Собственная частота, рад/с	
	Теория	MicroFe
1	1417	1423
2	2631	2552

На рисунке 5.11.2 представлен график перемещения первой массы в направлении оси y , а на рисунке 5.11.3 - второй массы.

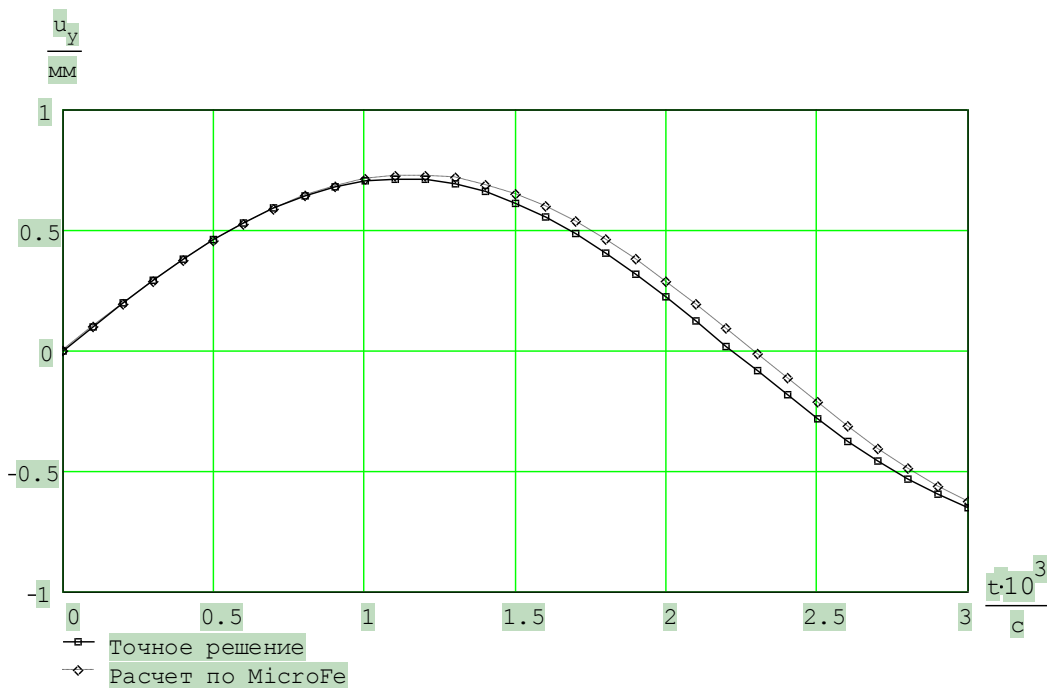


Рисунок 5.11.2

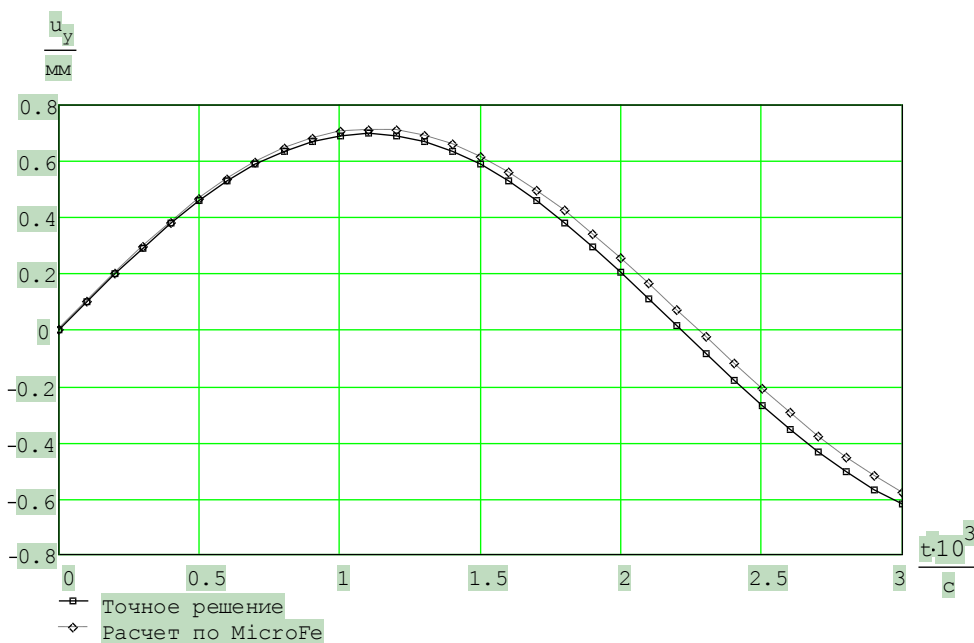


Рисунок 5.11.3

5.12 Нестационарные и гармонические колебания балки постоянного сечения с двумя сосредоточенными массами

1. Название задачи. Нестационарные и гармонические колебания балки постоянного сечения с двумя сосредоточенными массами.

2. Постановка задачи. К балке постоянного поперечного сечения присоединены два груза массой m (рисунок 5.12.1) Собственной массой балки по сравнению с массами грузов можно пренебречь.

Рассматриваются два варианта динамического нагружения системы:

- * в начальный момент времени $t = 0$ к первой массе прикладывается сила P .
- * на первую массу действует гармоническая возмущающая сила $P = P_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right)$

(рисунок 5.12.2)

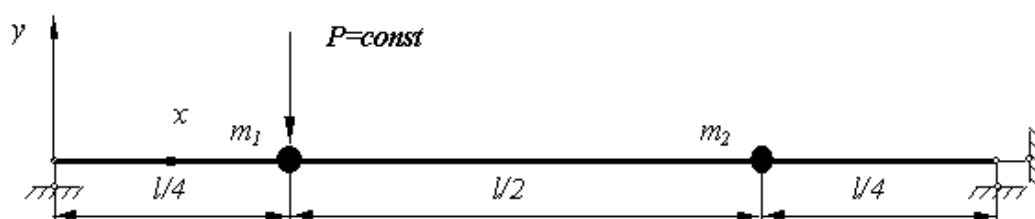


Рисунок 5.12.1

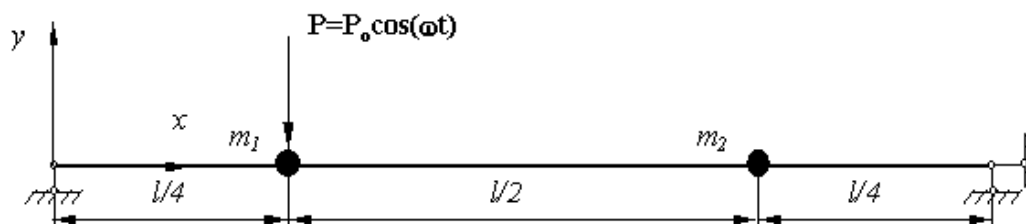


Рисунок 5.12.2

Основные прочностные характеристики:

- $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,
- $F = 5.0 \cdot 10^{-3}$ м² - площадь поперечного сечения,
- $J = 2.0 \cdot 10^{-6}$ м⁴ - момент инерции поперечного сечения балки,
- $l = 2$ м - длина балки,
- $m_1 = m_2 = 100$ кг - сосредоточенные массы.

3. Конечноэлементная модель. Для определения собственных частот и определения перемещения сосредоточенных масс балка была разбита на 4 элемента типа 2D балок.

4. Результаты расчета сравниваются с аналитическими результатами, полученными по соотношениям, представленным в [Расчеты на прочность в машиностроении /Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. В трех томах. Том 3. М.:Машгиз, 1959.].

Результаты расчетов собственных частот колебаний и их сравнение с аналитическим представлены в таблице 5.12.1.

Таблица 5.12.1

№ п/п	Собственная частота, рад/с	
	Теория	MicroFe
1	216.50	216.50
2	612.37	612.37

На рисунке 5.12.3 представлен график перемещения первой массы, а на рисунке 5.12.4 график перемещения второй массы при приложении в начальный момент времени силы $P=1$ кН к первой массе.

На рисунке 5.12.5 представлен график перемещения первой массы, а на рисунке 5.12.6 график перемещения второй массы при приложении к первой массе гармонического воздействия $P=P_0 \cdot \cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T})$, где $P_0 = 1$ кН, $T = 0.01$ с.

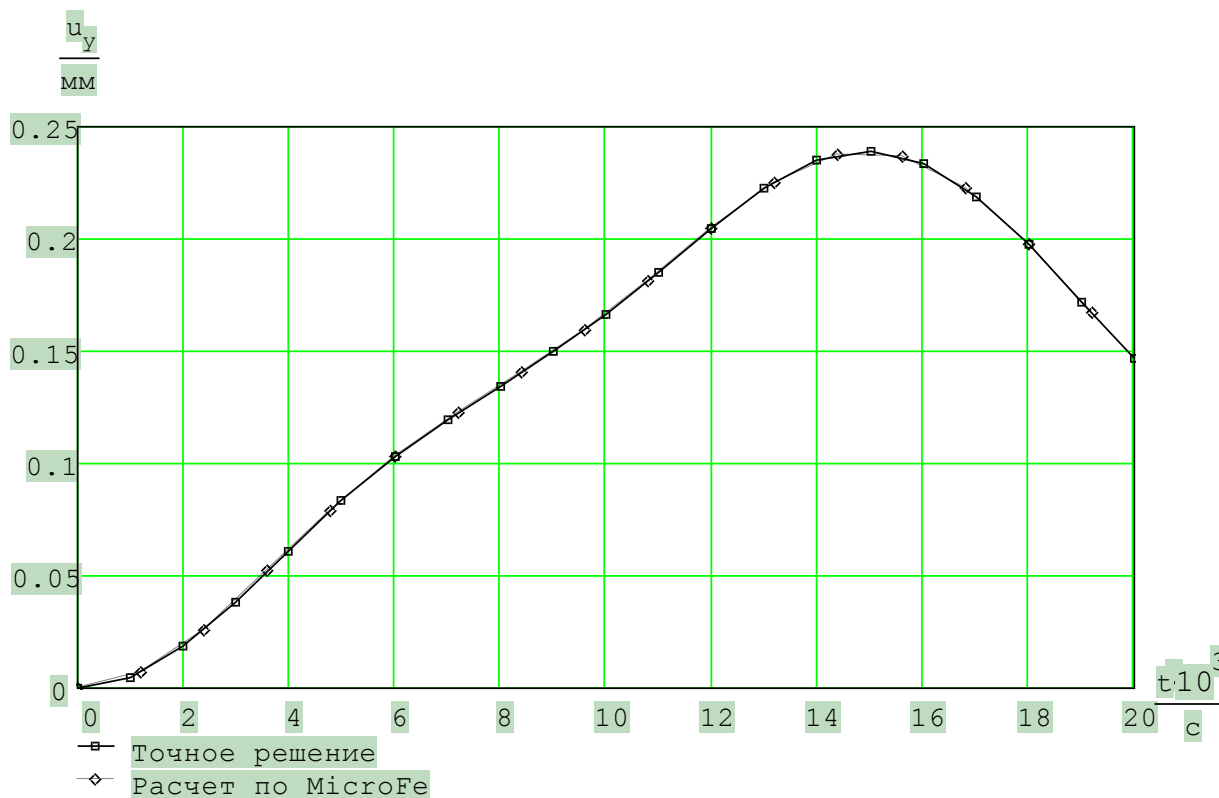


Рисунок 5.12.3

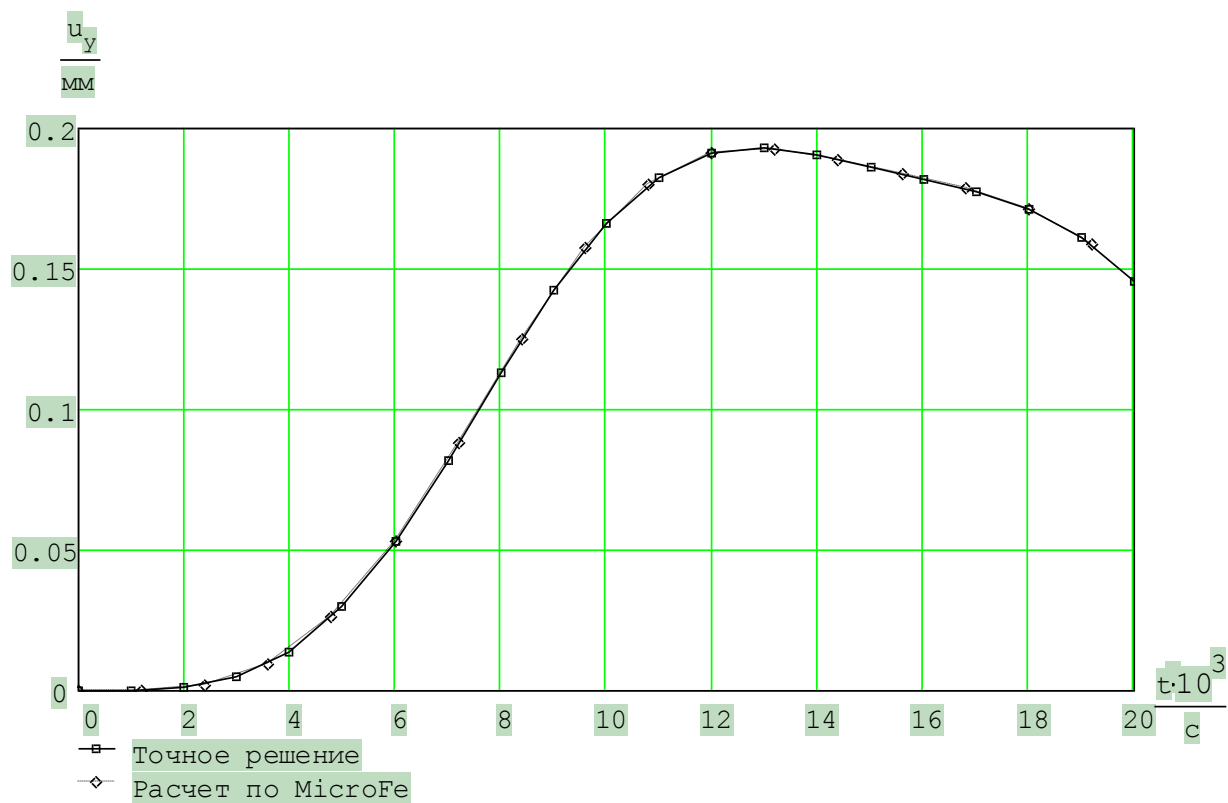


Рисунок 5.12.4

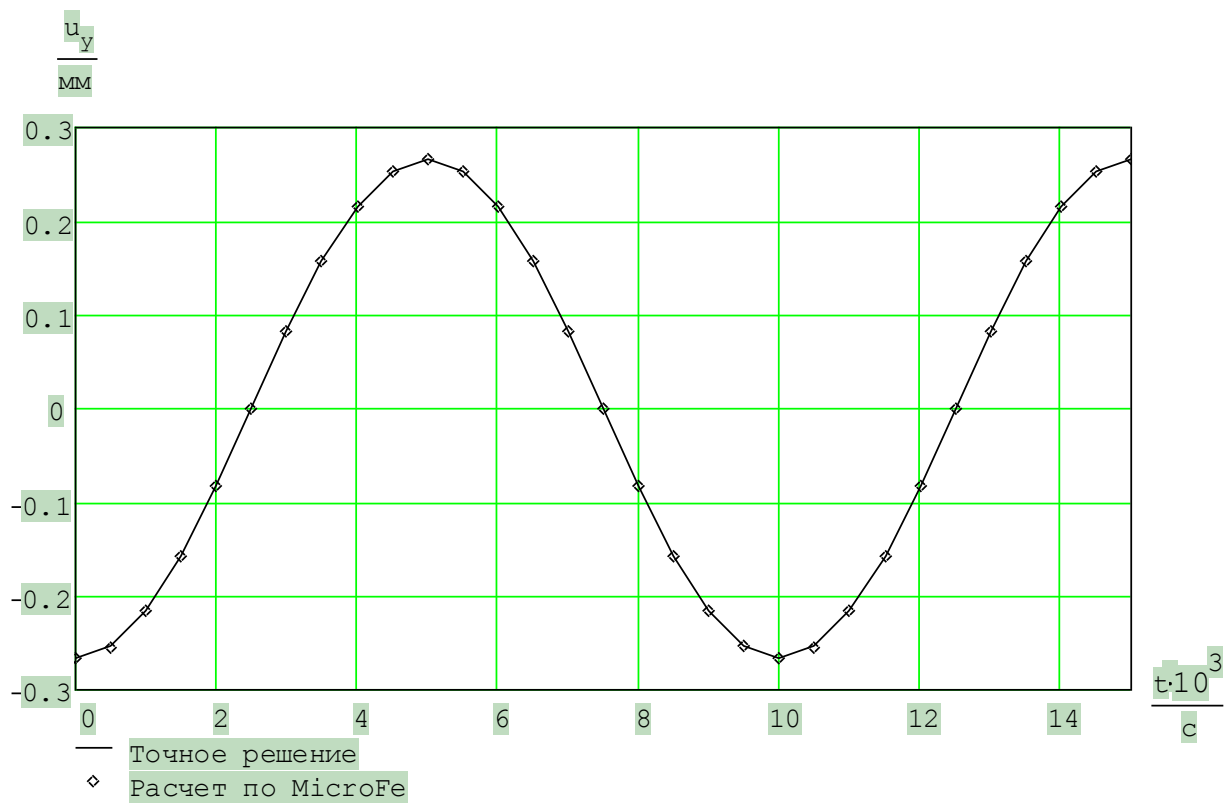


Рисунок 5.12.5

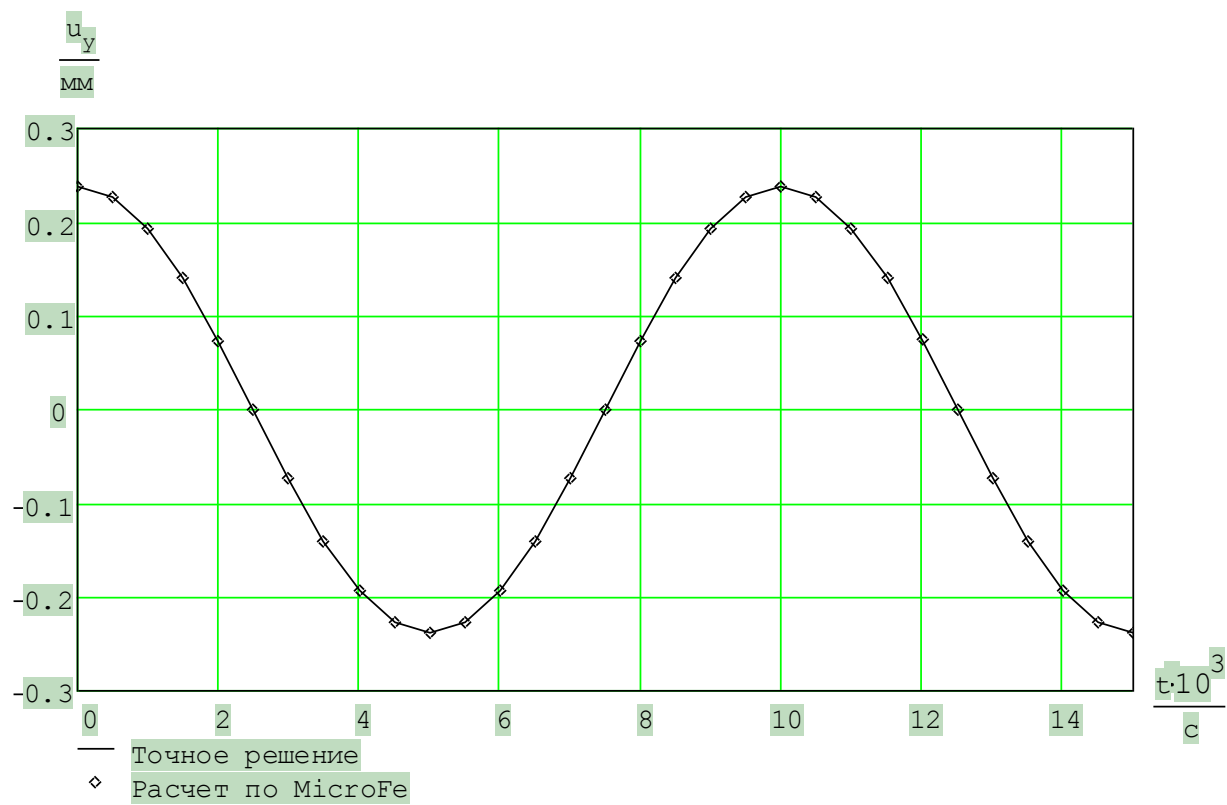


Рисунок 5.12.6

5.13 Гармонические колебания балки постоянного сечения с распределенной массой

1. Название задачи. Гармонические колебания балки постоянного сечения с распределенной массой.

2. Постановка задачи. К середине заземленной балки постоянного поперечного сечения (рисунок 5.13.1). приложена гармоническая возмущающая сила $P = P_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right)$. Определить собственные частоты и перемещение балки во времени.

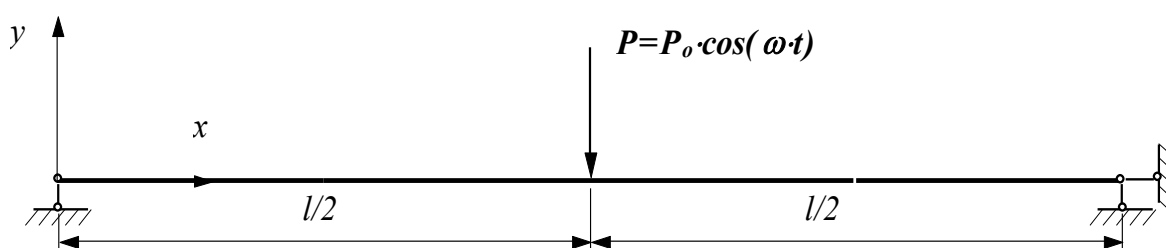


Рисунок 5.13.1

Основные прочностные характеристики:

Материал балки:

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,

Поперечное сечение балки:

$F = 5.0 \cdot 10^{-3}$ м² - площадь поперечного сечения,

$J = 2.0 \cdot 10^{-6}$ м⁴ - момент инерции поперечного сечения балки,

$\rho = 8000$ кг·м⁻³ - плотность материала балки,

$l = 2$ м - длина балки.

3. Конечноэлементная модель. Для определения собственных частот и определения перемещений балка разбивалась на 20 балочных 2D элементов.

4. Результаты расчета сравниваются с аналитическими результатами, полученными по соотношениям, представленным в [Расчеты на прочность в машиностроении /Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. В трех томах. Том 3. М.:Машгиз, 1959.].

Результаты расчетов собственных частот колебаний и их сравнение с аналитическим представлены в таблице 5.13.1.

На рисунке 5.13.2 показаны графики поперечного перемещения балки в месте приложения нагрузки.

Таблица 5.13.1

№ п/п	Собственная частота, рад/с	
	Теория	MicroFe
1	246.74	246.74
2	986.96	986.95
3	2221	2221
4	3948	3947
5	6169	6167
6	8883	8877
7	12090	12074
8	15791	15752

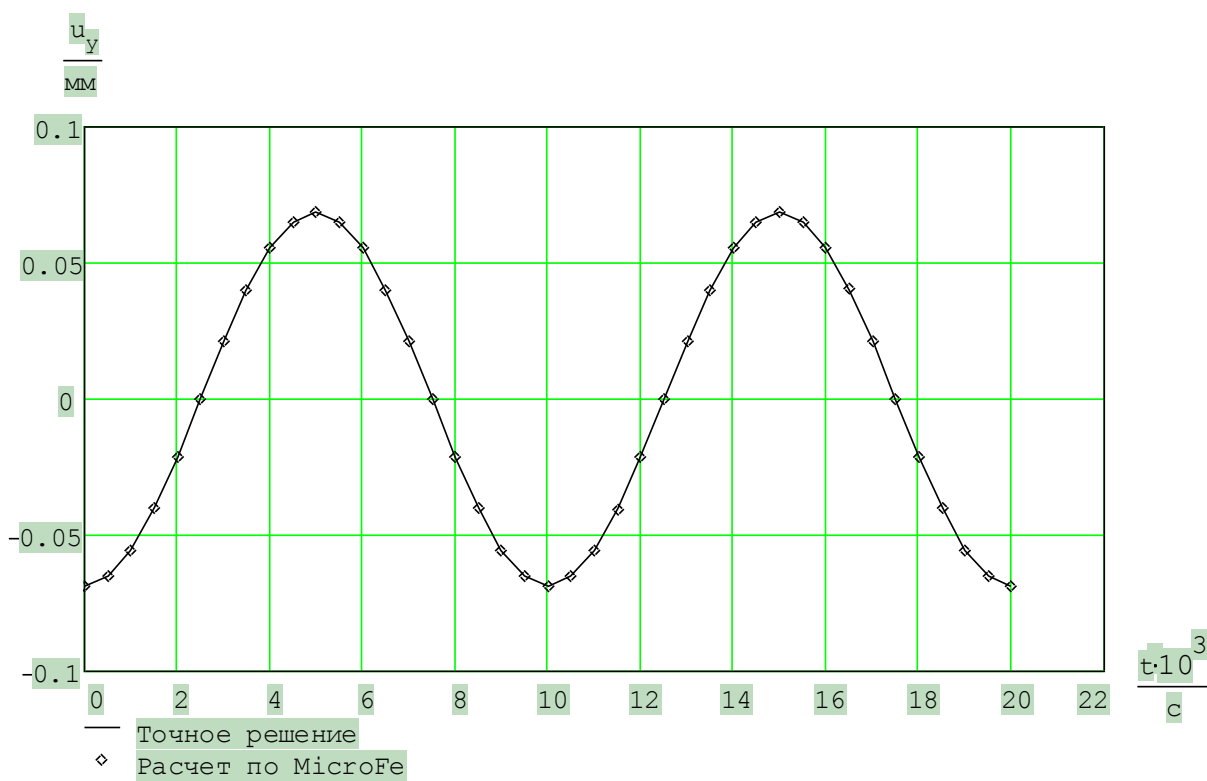


Рисунок 5.13.2

5.14 Кинематическое возбуждение консоли с сосредоточенной массой

1. Название задачи. Определить перемещение массы во времени для консольного стержня.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Консольный стержень с сосредоточенной массой и возбуждаемым основанием (рис. 5.14.1). Определить перемещение массы во времени для консольного стержня при отсутствии демпфирования.

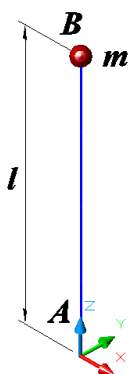


Рис.5.14.1

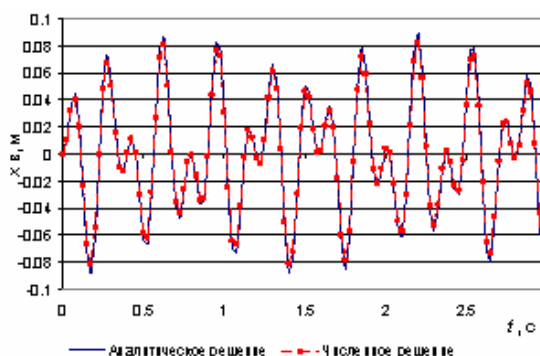


Рис.5.14.2

3. Исходные данные.

- $l=1$ м - длина консоли;
- $b=h=0.04$ м - размеры поперечного сечения консоли;
- $E = 2 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;
- $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
- $m = 0.1$ т - сосредоточенная масса в т. В.

Точка А горизонтально смещается по закону $x_A(t) = \Delta \cos \Theta t$, $x_A(t) = -\Delta \Theta^2 \cos \Theta t$, где $\Delta=0.1$ м, $\Theta=20$ с⁻¹

4. Конечноэлементная модель. Стержень разбивался на 4 конечных элемента «3D-стержень», шаг интегрирования по времени – 0.025 с.

5. Аналитическое решение. В соответствии с [Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений). – М.: Изд-во литературы по строительству, 1964.] аналитическое решение выражается формулой

$x_B(t) = \Delta \frac{\Theta^2 / \omega^2}{1 - \Theta^2 / \omega^2} (\cos \Theta t - \cos \omega t)$, где $\omega = 35.78$ рад/с – круговая частота свободных колебаний консоли.

6. Сопоставление результатов. На рис.5.14.2 показан график поперечного перемещения во времени т.В.

6 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (ЛИНЕЙНО-УПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ)

6.1 Устойчивость рамы

1. Название задачи. Устойчивость защемленной трехпролетной двухэтажной рамы.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Защемленная трехпролетная двухэтажная рама (рис. 6.1.1). Разными цветами на рисунке показаны элементы разной жесткости. Определить критическое значение нагрузки.

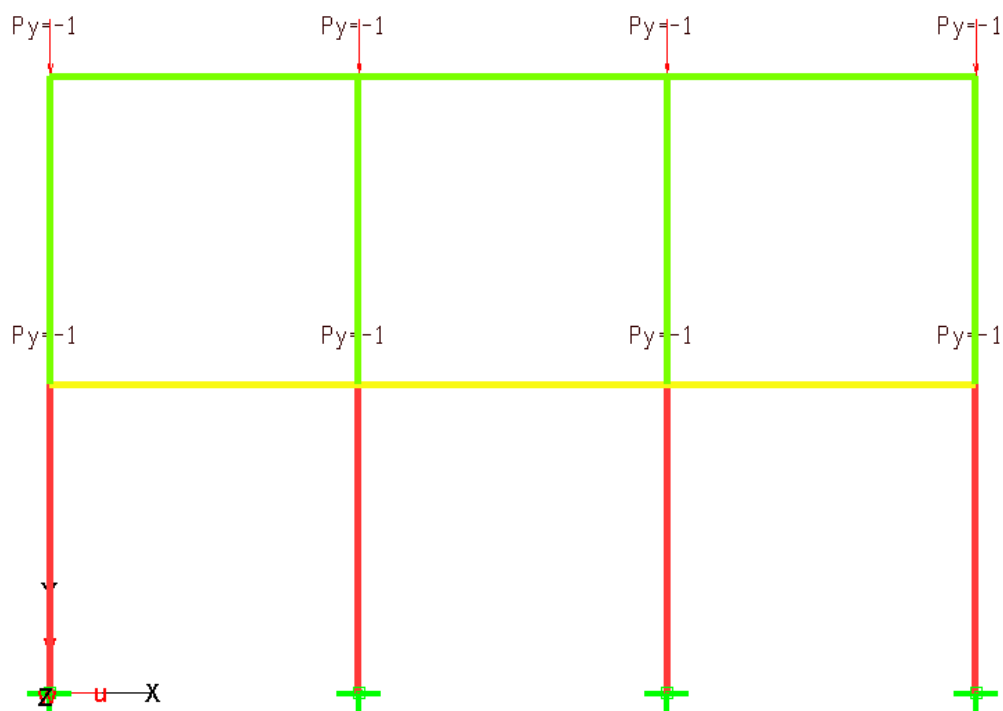


Рис.6.1.1

3. Исходные данные.

- | | |
|---------------------------------|--|
| $H = 6$ м | - размер этажа и пролета рамы; |
| $A = 0.00845$ м ² | - площадь поперечного сечения всех элементов; |
| $J_{1k} = 2400$ см ⁴ | - момент инерции сечения колонн первого этажа; |
| $J_2 = 1200$ см ⁴ | - момент инерции сечения колонн и балок второго этажа; |
| $J_{1b} = 2000$ см ⁴ | - момент инерции сечения балок первого этажа; |
| $E = 2 \cdot 10^8$ кПа | - модуль упругости; |
| $\mu = 0.3$ | - коэффициент Пуассона. |

4. Конечноэлементная модель. Каждый стержень разбивался на 4 конечных элемента «3D-стержень».

5. Аналитическое решение для критической нагрузки $P_{у}$ приведено в [Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1949.] и равняется 418 кН.

6. Сопоставление результатов. На рис.6.1.2 показана первая форма потери устойчивости рамы. Критическое значение нагрузки получено $P_{у}=417.0$ кН.

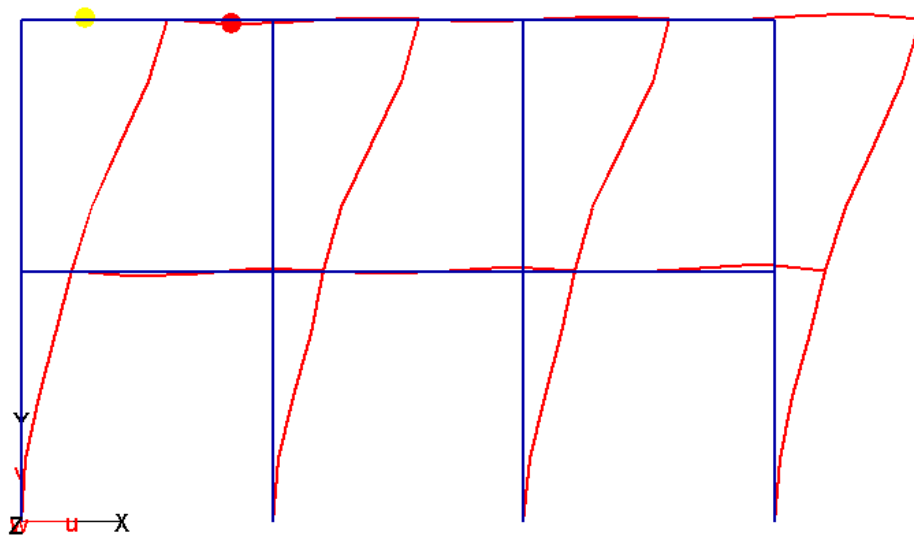


Рис.6.1.2

6.2 Устойчивость консольного тела

1. Название задачи. Устойчивость консоли постоянного сечения.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Защемленное левым торцом консольное тело постоянным сечением 1×1 м и длиной 10 м (рис. 6.2.1). По правой кромке консоль нагружена нагрузками 1) осевой - Q_x , 2) поперечной – Q_y , 3) поперечной – Q_z . Определить критическое значение для каждого нагружения.

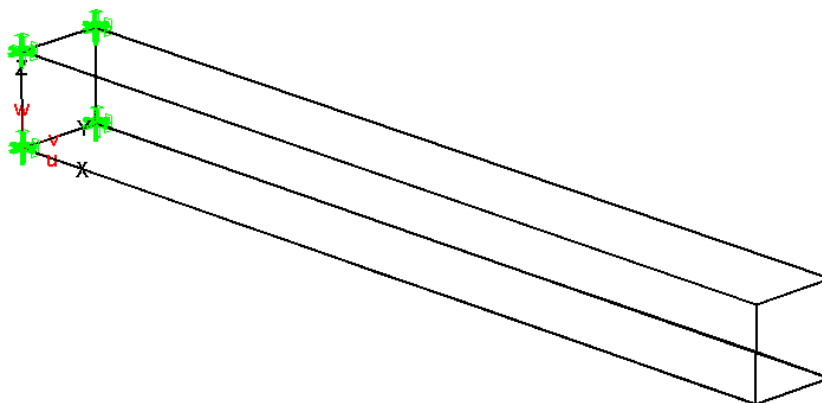


Рис.6.2.1

3. Исходные данные.

$E = 3 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалось три варианта расчетной схемы. 1-я расчетная схема – стержневая - 10 конечных элемента «3D-стержень» (рис.6.2.2а). 2-я расчетная схема – оболочечная - 10 конечных элементов плоской оболочки (рис.6.2.2б). 3-я расчетная схема – объемная - 10 объемных конечных элементов теории упругости (рис.6.2.2с).

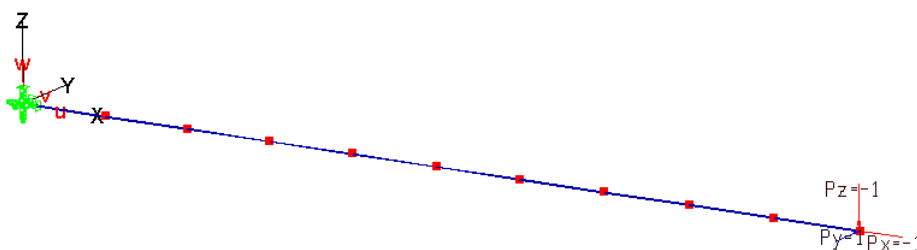


Рис.6.2.2а

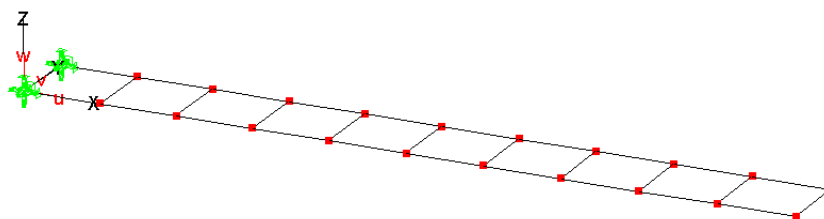


Рис.6.2.2б

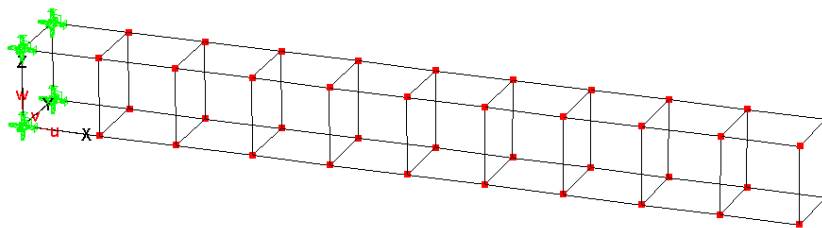


Рис.6.2.2с

5. Эталонное решение для критических нагрузок соответствующих разным нагружениям взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.2.1 приведены по 2 первых критических значения нагрузок полученные для различных расчетных схем по программе и эталонные значения. Также там приведено $\bar{P} = P_{crit,1} / P_{crit,1}^{\text{Э}}$. Как видно из таблицы для всех схем имеем прекрасное соответствие результатов эталонным значениям для различных нагружений.

Таблица 6.2.1

	Стержневая схема			Оболочечная схема			Объемная схема		
	Qx	Qy	Qz	Qx	Qy	Qz	Qx	Qy	Qz
$P_{crit,1}$	61336	85424	85424	61428	84168	84534	61659	91426	91426
$P_{crit,2}$	61336	211191	211191	61498	205577	211667	61659	227585	227585
Эталон, $P_{crit,1}^{\text{Э}}$	61685	84174	84174	61685	84174	84174	61685	84174	84174
\bar{P}	0.994	1.015	1.015	0.996	1.000	1.004	1.000	1.086	1.086

6.3 Устойчивость однопролетного тела

1. Название задачи. Устойчивость консоли постоянного сечения.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Тело постоянного сечения $1 \times 1 \text{ м}$ и длиной 10 м шарнирно оперто по торцам (рис. 6.3.1). К торцам приложены изгибающие моменты – M . Определить критическое значение момента.

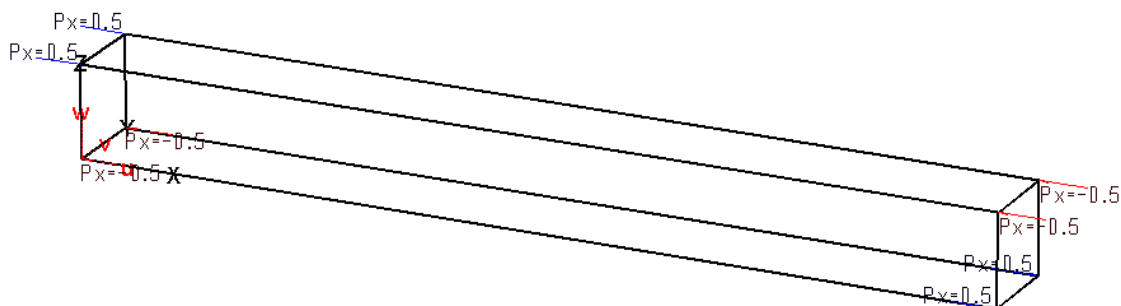


Рис.6.3.1

3. Исходные данные.

$E = 3 \cdot 10^7 \text{ кПа}$ - модуль упругости;

$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалось три варианта расчетной схемы. 1-я расчетная схема – стержневая - 10 конечных элемента «3D-стержень» (рис.6.3.2a). 2-я расчетная схема – оболочечная - 10 конечных элементов плоской оболочки (рис.6.3.2b). 3-я расчетная схема – объемная - 10 объемных конечных элементов теории упругости (рис.6.3.2c).

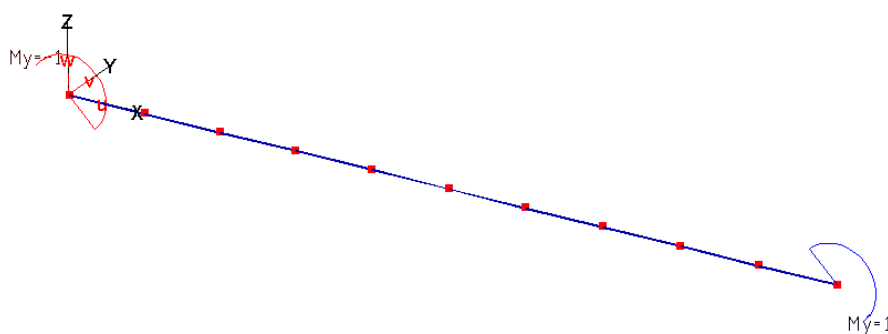


Рис.6.3.2a

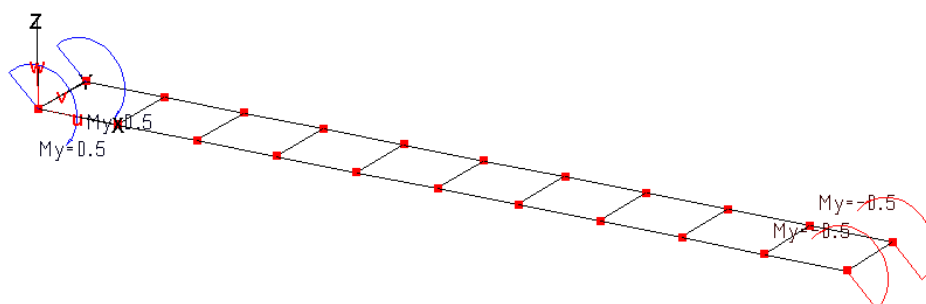


Рис.6.3.2b (Нагружение 1)

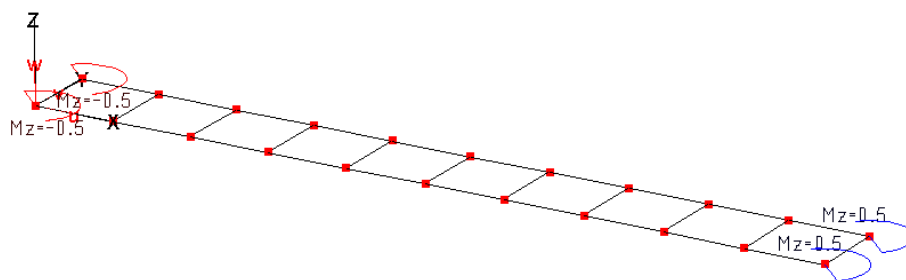


Рис.6.3.2b (Нагружение 2)

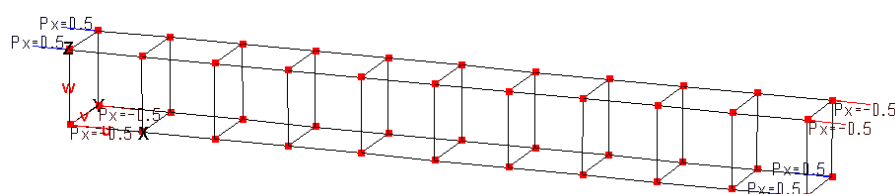


Рис.6.3.2c

5. Эталонное решение для критических нагрузок соответствующих разным нагружениям взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.3.1 приведено первое критическое значение момента полученное для различных расчетных схем по программе и эталонные значения. Также там приведено $\bar{M} = M_{crit,1} / M_{crit,1}^{\text{Э}}$. Как видно из таблицы для всех схем имеем прекрасное соответствие результатов эталонным значениям для различных нагружений.

Таблица 6.3.1

	Стержневая схема	Оболочечная схема		Объемная схема
		Нагружение 1	Нагружение 2	
$M_{crit,1} \times 10^{-3}$	670	638	651	698
Эталон, $M_{crit,1}^{\text{Э}} \times 10^{-3}$	659	659	659	659
\bar{M}	1.017	0.968	0.988	1.059

6.4 Устойчивость двутавра при выпучивании из плоскости

1. Название задачи. Устойчивость шарнирно опертого стержня.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Стержень постоянного сечения и длиной 6м шарнирно оперто по торцам (рис. 6.4.1). Сечение стержня – двутавр № 60Б1 по ГОСТ 26020-83. К торцам стержня: 1-е нагружение- осевая сила $P = 1000$ кН; 2-е нагружение – изгибающий момент $M = 1000$ кНм; 3-е нагружение – поперечная нагрузка интенсивностью $q = 1000$ кН/м. Определить критическое значение нагрузок для каждого нагружения.

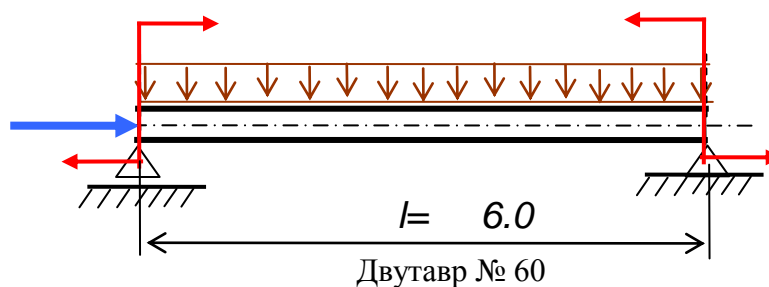


Рис.6.4.1

3. Исходные данные.

$E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась варианта расчетной схемы, состоящая из 24 конечных элементов «3D-стержень».

5. Эталонное решение для критических нагрузок соответствующих разным нагружениям взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.4.1 приведены первые критические значение нагрузок полученные по программе и эталонные значения. Также там приведено $\bar{k} = k_{crit,1} / k_{crit,1}^{\text{э}}$. Как видно из таблицы имеем прекрасное соответствие результатов эталонным значениям для различных нагружений.

Таблица 6.4.1

Нагружение	MicroFe	Эталон	\bar{k}
1 (P)	1776	1780	0.998
2 (M)	374	373	1.003
3 (q)	94	93	1.011

6.5 Устойчивость однопролетного тела при температурном воздействии

1. Название задачи. Устойчивость защемленного постоянного сечения.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Тело постоянного сечения 1×1 м и длиной 10 м жестко защемлено по торцам (рис. 6.5.1). Тело подвержено равномерному температурному нагреву. Определить критическое значение температуры.

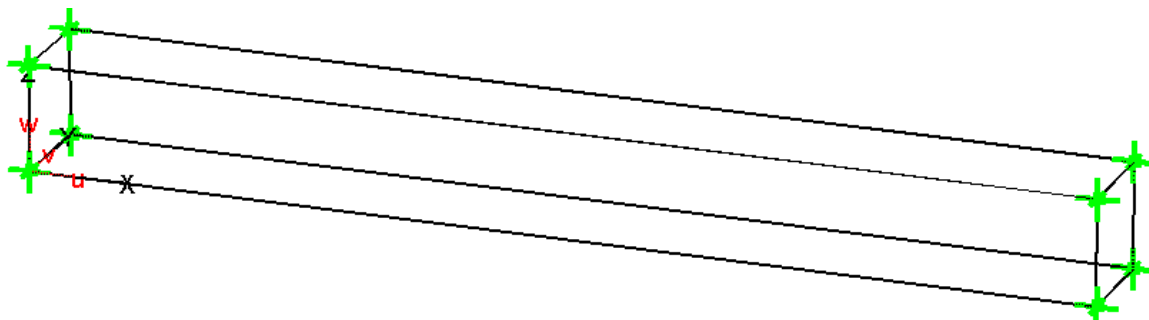


Рис.6.5.1

3. Исходные данные.

$E = 3 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона,

$\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ - коэффициент температурного расширения.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалось два варианта расчетной схемы. 1-я расчетная схема – стержневая - 10 конечных элемента «3D-стержень» (рис.6.5.2а). 2-я расчетная схема – оболочечная - 10 конечных элементов плоской оболочки (рис.6.5.2б).

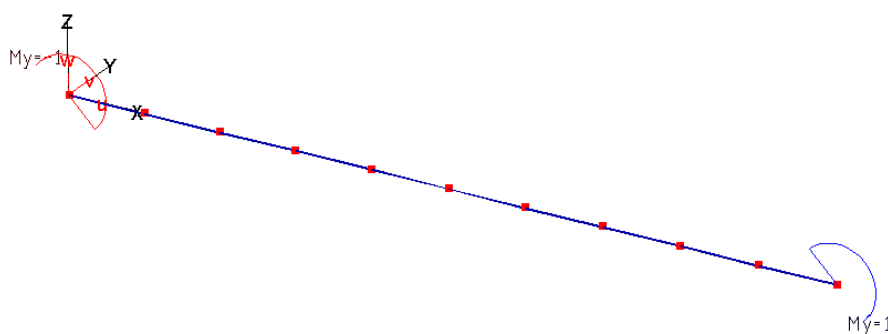


Рис.6.5.2а

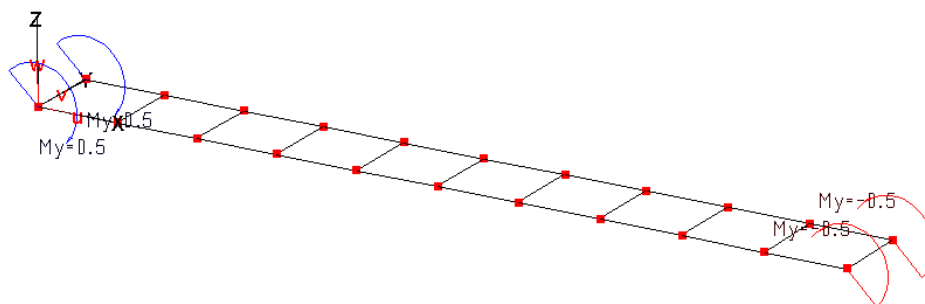


Рис.6.5.2б

5. Эталонное решение для критической температуры взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. - М.: Машиностроение, 1968].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.5.1 приведены первые два критических значения температуры полученные для различных расчетных схем по программе и эталонное значение. Также там приведено $\bar{T} = T_{crit,1} / T_{crit,1}^{\text{Э}}$. Как видно из таблицы для всех схем имеем прекрасное соответствие результатов эталонному значению.

Таблица 6.5.1

	Стержневая схема		Оболочечная схема	
	$T_{crit,1}$	$T_{crit,2}$	$T_{crit,1}$	$T_{crit,2}$
MicroFe	3016	3016	2980	3046
Эталон,	3290	3290	3290	3290
\bar{T}	0.917	0.917	0.906	0.926

6.6 Устойчивость опертой пластинки

1. Название задачи. Устойчивость шарнирно опертой пластинки.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная пластинка размером 8м шарнирно опертая по кромкам под действием сжимающего напряжения по двум противоположным кромкам (рис. 6.6.1). Определить критическое значение напряжения.

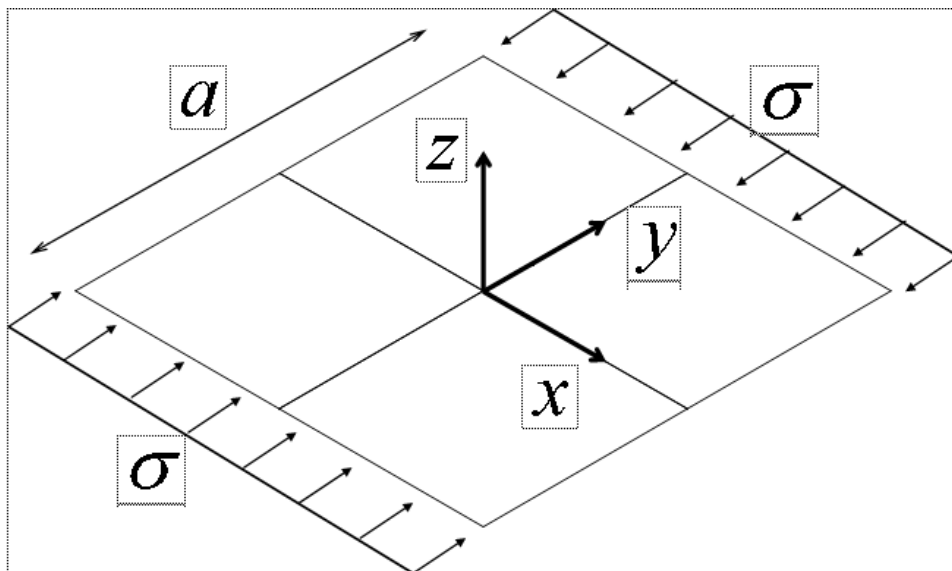


Рис.6.6.1

3. Исходные данные.

$E = 1 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;
 $\mu = 1/3$ - коэффициент Пуассона;
 $a = 8$ м - размер квадратной пластинки
 $t = 0.008$ м - толщина пластинки.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались пять вариантов расчетной схемы – сетки 2x2, 4x4, 6x6, 8x8 и 10x10 для всей плиты. Краевые условия: $x = \pm a/2, u_z = 0, \varphi_x = 0$; $y = \pm a/2, u_z = 0, \varphi_y = 0$.

5. Эталонное решение взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968].

Критическое напряжение определяется по формуле $\sigma_{crit} = \frac{4\pi^2 D}{ta^2}$, где D – цилиндрическая жесткость пластинки.

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.6.1 приведено критическое значение напряжения полученное для различных расчетных схем по программе и эталонное значение. Также там приведено $\sigma = \sigma_{crit,1} / \sigma_{crit,1}^{\text{э}}$. Как видно из таблицы для всех схем имеем прекрасное соответствие результатов эталонному значению.

Таблица 6.6.1

	2x2	4x4	6x6	8x8	10x10
MicroFe	39.07	37.15	37.02	37.01	37.01
Эталон,	37.01	37.01	37.01	37.01	37.01
σ	1.056	1.004	1.000	1.000	1.000

6.7 Устойчивость пластинки с несмещаемыми кромками

1. Название задачи. Устойчивость шарнирно опертой пластинки с несмещаемыми кромками .

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная пластинка размером 8м шарнирно опертая по кромкам под действием сжимающего напряжения по двум противоположным кромкам (рис. 6.7.1). Кромки, свободные от нагрузок, несмещаемы относительно оси x . Определить критическое значение напряжения.

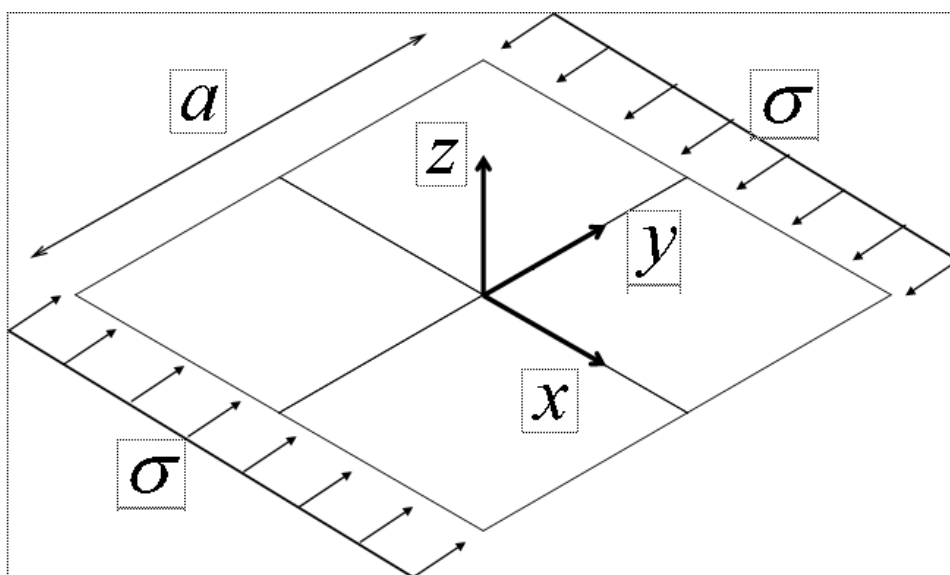


Рис.6.7.1

3. Исходные данные.

$E = 1 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;
 $\mu = 1/3$ - коэффициент Пуассона;
 $a = 8$ м - размер квадратной пластинки
 $t = 0.008$ м - толщина пластинки.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались пять вариантов расчетной схемы – сетки 2×2 , 4×4 , 6×6 , 8×8 и 10×10 для всей плиты. Краевые условия: $x = \pm a/2, u_z = 0, \varphi_x = 0, u_x = 0$; $y = \pm a/2, u_z = 0, \varphi_y = 0$.

5. Эталонное решение взято из [J. H. Argyris, P. C. Dunne, G. A. Malejannakis, E. Schelkle, *A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 11, (1977), 97-131].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.7.1 приведено критическое значение напряжения полученное для различных расчетных схем по программе и эталонное значение. Также там приведено $\bar{\sigma} = \sigma_{crit,1} / \sigma_{crit,1}^{\text{э}}$. Как видно из таблицы для всех схем имеем прекрасное соответствие результатов эталонному значению.

Таблица 6.7.1

	2x2	4x4	6x6	8x8	10x10
MicroFe	31.80	28.54	28.12	27.97	27.90
Эталон,	27.80	27.80	27.80	27.80	27.80
σ	1.144	1.027	1.012	1.006	1.004

6.8 Устойчивость пластинки с кинематическим воздействием

1. Название задачи. Устойчивость пластинки с кинематическим воздействием .

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная пластинка размером 8м шарнирно опертая по кромкам (рис. 6.8.1). Кромки несмещаемы относительно оси перпендикулярной кромкам. Одна из кромок перемещается на расстояние $d = \varepsilon a$. Определить критическое значение параметра ε .

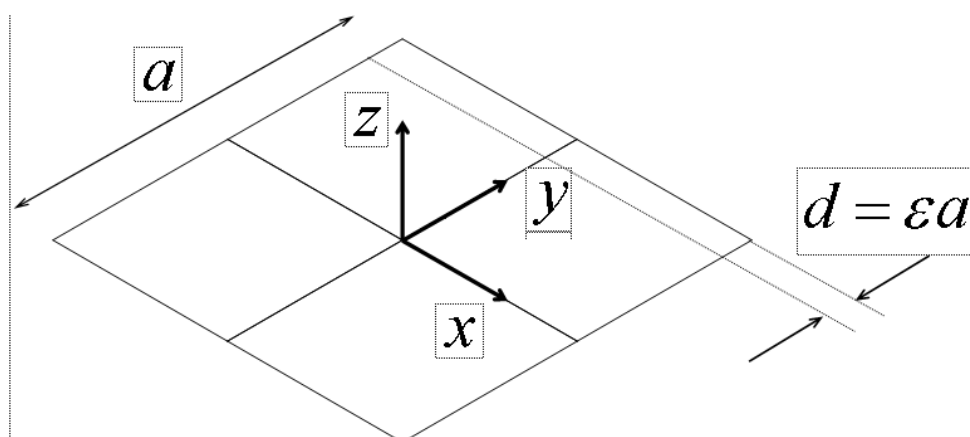


Рис.6.8.1

3. Исходные данные.

- $E = 1 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;
 $\mu = 1/3$ - коэффициент Пуассона;
 $a = 8$ м - размер квадратной пластинки
 $t = 0.008$ м - толщина пластинки.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались пять вариантов расчетной схемы – сетки 2×2 , 4×4 , 6×6 , 8×8 и 10×10 для всей плиты. Краевые условия:
 $x = \pm a/2, u_z = 0, \varphi_x = 0, u_x = 0$; $y = +a/2, u_z = 0, \varphi_y = 0, u_y = -d$;
 $y = -a/2, u_z = 0, \varphi_y = 0, u_y = 0$.

5. Эталонное решение взято из [J. H. Argyris, P. C. Dunne, G. A. Malejannakis, E. Schelkle, *A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 11, (1977), 97-131].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.8.1 приведено критическое значение параметра $\varepsilon \times 10^4$ полученное для различных расчетных схем по программе и эталонное значение. Также там приведено $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{crit,1} / \varepsilon_{crit,1}^{\text{э}}$. Как видно из таблицы для всех схем имеем прекрасное соответствие результатов эталонному значению.

Таблица 6.8.1

	2x2	4x4	6x6	8x8	10x10
MicroFe	2.597	2.475	2.469	2.468	2.468
Эталон,	2.464	2.464	2.464	2.464	2.464
ε	1.054	1.004	1.002	1.002	1.002

6.9 Устойчивость пластинки при чистом сдвиге

1. Название задачи. Устойчивость шарнирно опертой пластинки при чистом сдвиге.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная пластинка размером 10м шарнирно опертая по кромкам под действием касательных напряжений по всем кромкам (рис. 6.9.1). Определить критическое значение касательного напряжения.

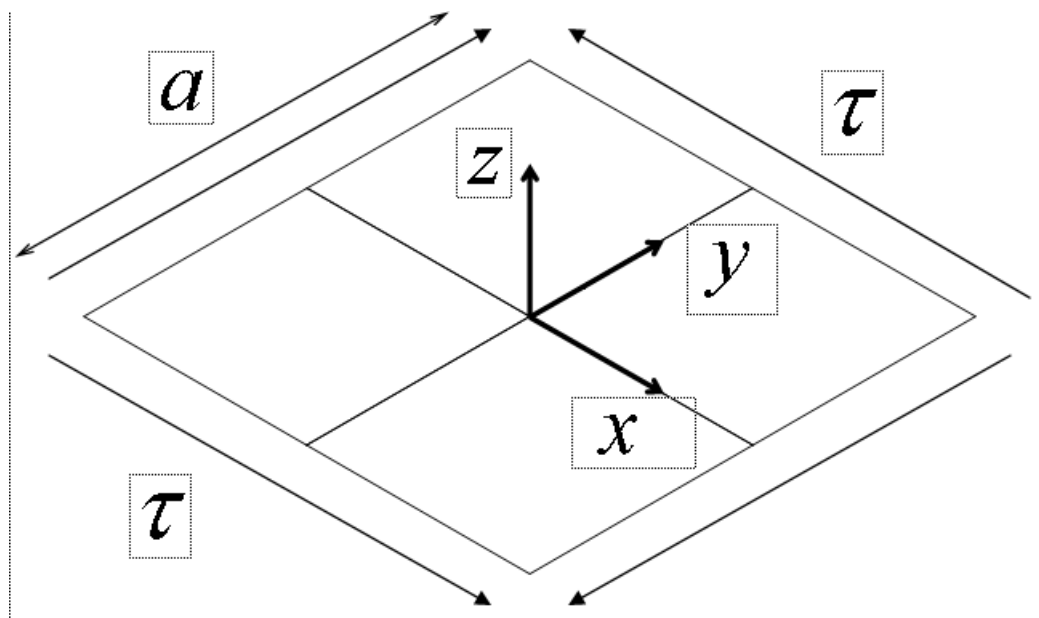


Рис.6.9.1

3. Исходные данные.

- $E = 1 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости;
 $\mu = 0.25$ - коэффициент Пуассона;
 $a = 10$ м - размер квадратной пластинки
 $t = 0.1$ м - толщина пластинки.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались пять вариантов расчетной схемы – сетки 4x4, 6x6, 8x8 и 10x10 для всей плиты. Краевые условия: $x = \pm a/2, u_z = 0, \varphi_x = 0$; $y = \pm a/2, u_z = 0, \varphi_y = 0$.

5. Эталонное решение взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968].

Критическое напряжение определяется по формуле $\tau_{crit} = \frac{k_{crit} \pi^2 D}{t a^2}$, где D – цилиндрическая жесткость пластинки.

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.9.1 приведено критическое значение параметра $k_{crit,1}$ полученное для различных расчетных схем по программе и эталонное

значение. Также там приведено $\hat{k} = k_{crit,1} / k_{crit,1}^{\mathcal{E}}$. Как видно из таблицы для всех схем имеем прекрасное соответствие результатов эталонному значению.

Таблица 6.9.1

	4x4	6x6	8x8	10x10
MicroFe	9.863	9.443	9.362	9.336
Эталон,	9.34	9.34	9.34	9.34
\hat{k}	1.056	1.011	1.002	1.000

В таблице 6.9.2 приведено критическое значение параметра $k_{crit,1}$ полученное для дисторсионной расчетной схемы 4x4 по программе и эталонное значение. Искажения создавались смещением центрального узла по осям x и y - Δ_x, Δ_y (рис. 6.9.2). Как видно из таблицы даже при большом искажении положения узла дисторсия практически не влияет на результаты.

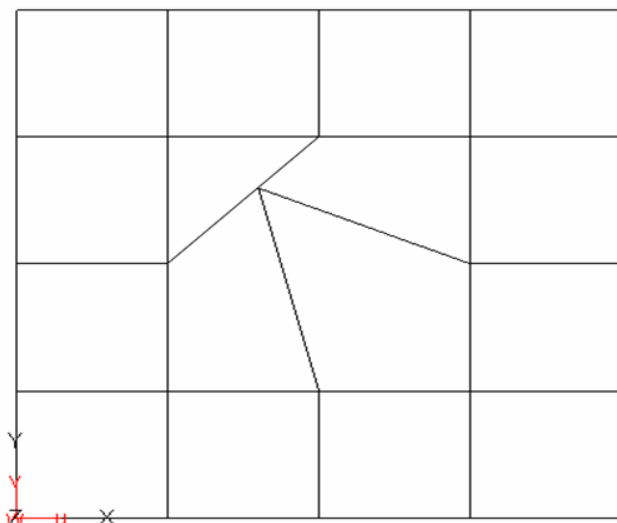


Рис.6.9.2

Таблица 6.9.2

	$\Delta_x = -0.5, \Delta_y = 0$	$\Delta_x = -1, \Delta_y = 0$	$\Delta_x = -2, \Delta_y = 0$	$\Delta_x = -1, \Delta_y = 1.5$
MicroFe	9.85	9.82	9.72	9.84
Эталон,	9.34	9.34	9.34	9.34
\hat{k}	1.055	1.051	1.041	1.054

6.10 Устойчивость ребристой пластины

1. Название задачи. Устойчивость ребристой пластины при одностороннем сжатии.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Прямоугольная пластинка размером 0.6 м (ширина) и 2.4 м (длина) шарнирно оперта по коротким кромкам, длинные кромки - свободны (рис. 6.10.1). По длинному направлению расположены с одинаковым шагом 3 ребра жесткости соосно с плитой. Короткие стороны подвержены равномерному сжатию. Определить критическое значение сжимающей силы. Источник [Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. -М.: Изд-во АСВ, 2004].

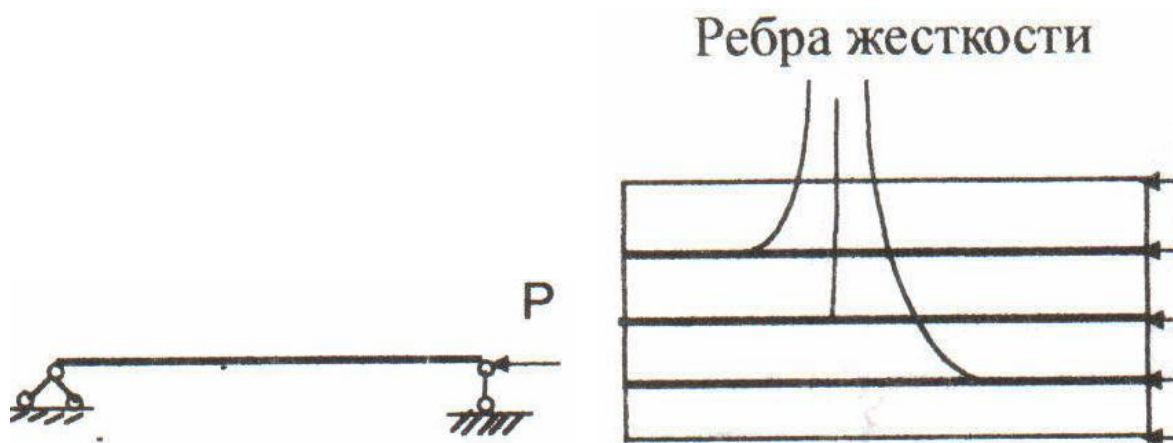


Рис.6.10.1

3. Исходные данные.

$E = 2 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$a = 2.4$ м - длина пластинки;

$b = 0.6$ м - ширина пластинки;

$h = 0.01$ м - толщина пластинки;

$l = 0.15$ м - расстояние между ребрами и ребер от длинных кромок пластинки;

$F_{\text{ребра}} = 3$ см² - площадь поперечного сечения ребер жесткости;

$I_{\text{ребра}} = 2,25$ см⁴ - момент инерции сечения ребер жесткости.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались оболочечно-стержневая расчетной схемы – плита представлялась КЭ плоской оболочки с сеткой 4x16, а ребра жесткости представлялись конечными элементами «3D-стержень» расположенными в срединной плоскости пластинки (64 КЭ плоской оболочки, 48 стержневых КЭ и 85 узлов, рис. 6.10.2).

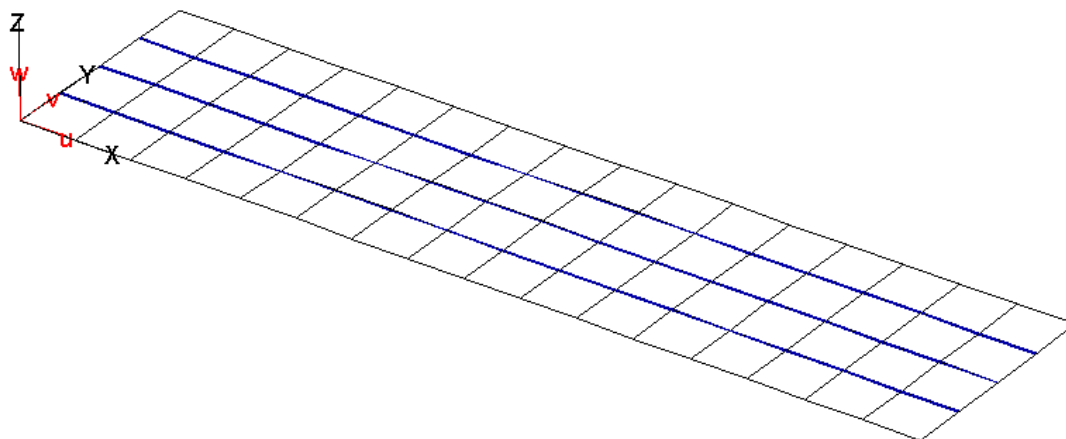


Рис.6.10.2

5. Эталонное решение взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.10.1 приведено критическое значение параметра $P_{crit,1}$ полученное по программе и эталонное значение. Также там приведено

$$\bar{p} = P_{crit,1} / P_{crit,1}^{\text{э}}$$

Таблица 6.10.1

MicroFe	40.30
Эталон,	40.26
\bar{p}	1.001

6.11 Устойчивость защемленной по торцам оболочки от внешнего давления

1. Название задачи. Устойчивость защемленной по торцам цилиндрической оболочки при внешнем сжатии.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Цилиндрическая оболочка жестко защемлена по торцам и подвергается внешнему сжатию равномерной нагрузкой q (рис. 6.11.1). Определить критическое значение интенсивности q . Источник [Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. -М.: Изд-во АСВ, 2000].

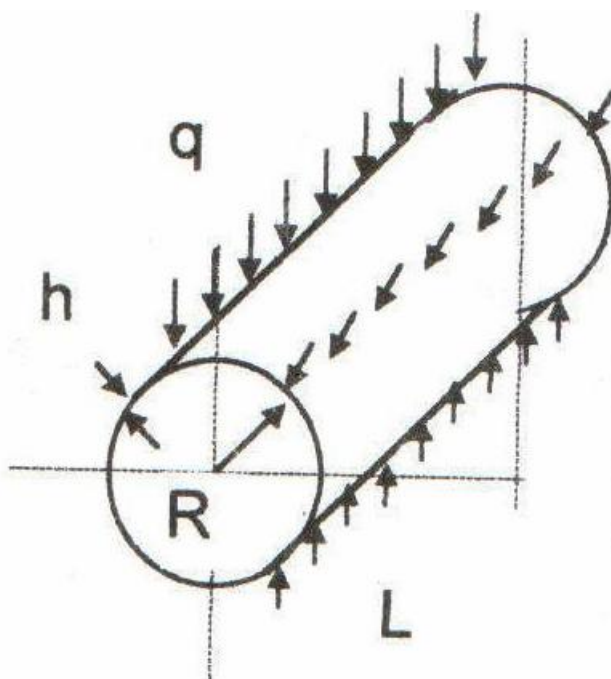


Рис.6.11.1

3. Исходные данные.

$E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$R = 0.5$ м - радиус оболочки;

$h = 0,005$ м - толщина оболочки;

$L = 1$ м - высота оболочки.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривались оболочечная расчетной схемы – оболочка представлялась КЭ плоской оболочки с сеткой 10 элементов по высоте оболочки и 30 элементов по окружности (300 КЭ плоской оболочки и 330 узлов, рис. 6.11.2).

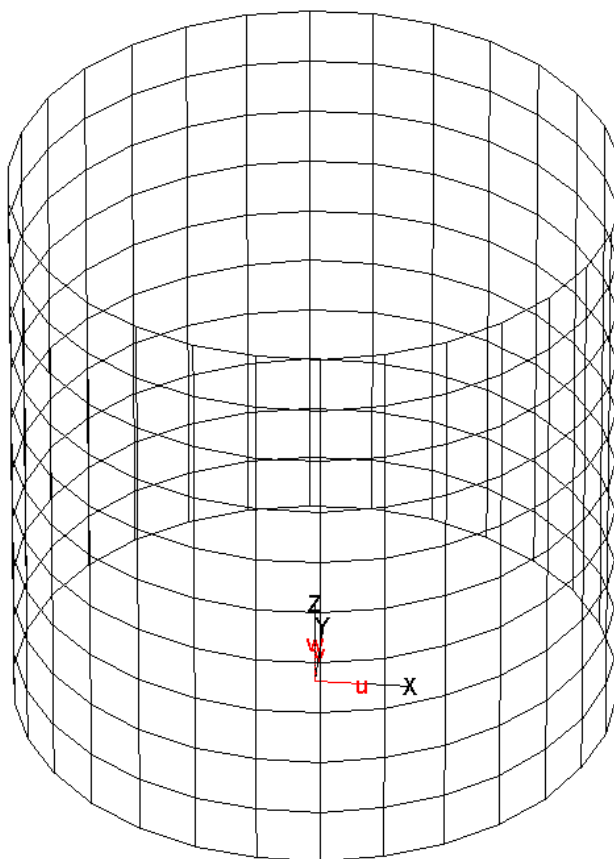


Рис.6.11.2

5. Эталонное решение взято из [Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. - М.: Наука, 1978].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.11.1 приведено критическое значение параметра $q_{crit,1}$ полученное по программе и эталонное значение. Также там приведено

$$\bar{q} = q_{crit,1} / q_{crit,1}^{\text{э}}$$

Таблица 6.11.1

MicroFe	1414
Эталон,	1420
\bar{q}	0.996

6.12 Устойчивость тонкостенной оболочки

1. Название задачи. Устойчивость тонкостенной консоли при одностороннем сжатии.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Консоль длиной 1.5 м и сечением приведенным на рис. 6.12.1 сжимается осевой силой. Все размеры на рисунке приведены в миллиметрах. Определить 3 первых критических значения сжимающей силы и соответствующие формы потери устойчивости.

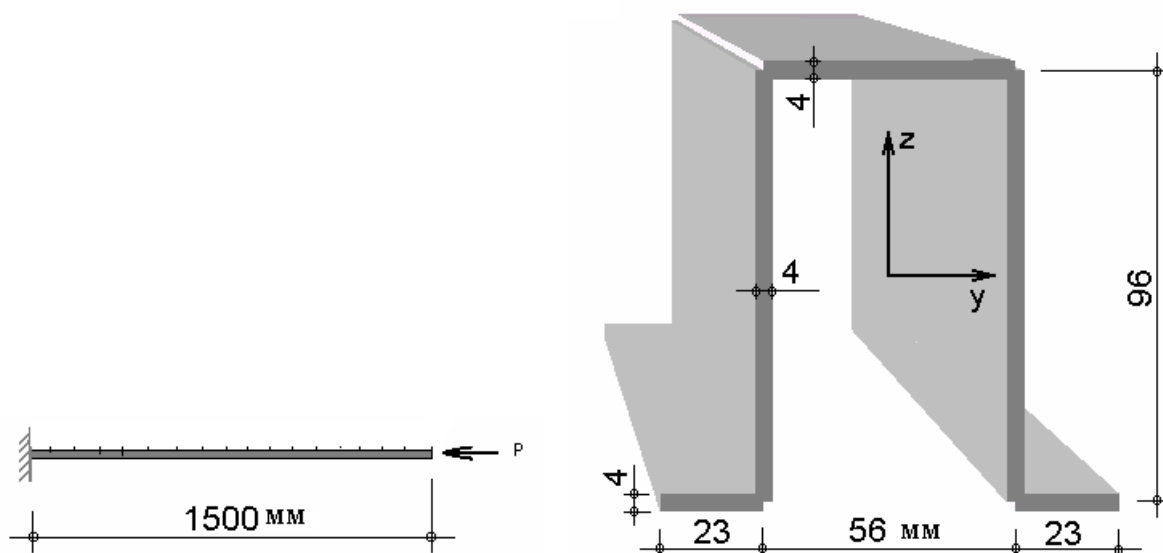


Рис.6.12.1

3. Исходные данные.

- $E = 2.1 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;
- $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
- $l = 1.5$ м - длина тела;
- $h = 0.004$ м - толщина пластинок.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась оболочечная расчетная схема (845 КЭ плоской оболочки, и 924 узла, рис. 6.12.2).

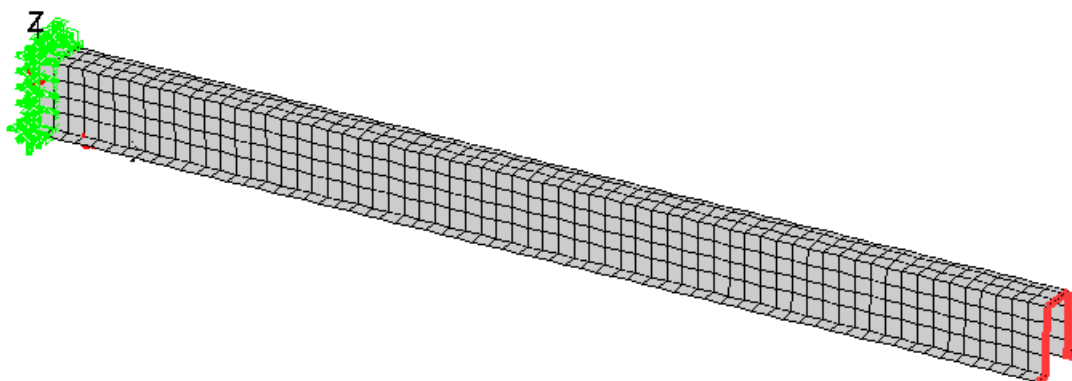


Рис.6.12.2

5. Эталонное решение взято для стержневой теории из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. - М.: Машиностроение, 1968].

6. Сопоставление результатов. В таблице 6.12.1 приведены критические значения параметра P_{crit} полученные по программе и эталонные значения. Также там приведено $\bar{p} = P_{crit} / P_{crit}^{Эталон}$. Отметим, что $P_{crit,1}$ соответствует изгибно-крутильной форме потери устойчивости, а $P_{crit,2}$ и $P_{crit,3}$ - изгибной (эйлеровой) формам потери устойчивости. Формы потери устойчивости приведены на рис. 6.12.3.

Таблица 6.12.1

	$P_{crit,1}$	$P_{crit,2}$	$P_{crit,3}$
MicroFe	53.74	190.44	345.98
Эталон,	56.34	220.16	352.11
\bar{p}	0.954	0.865	0.983

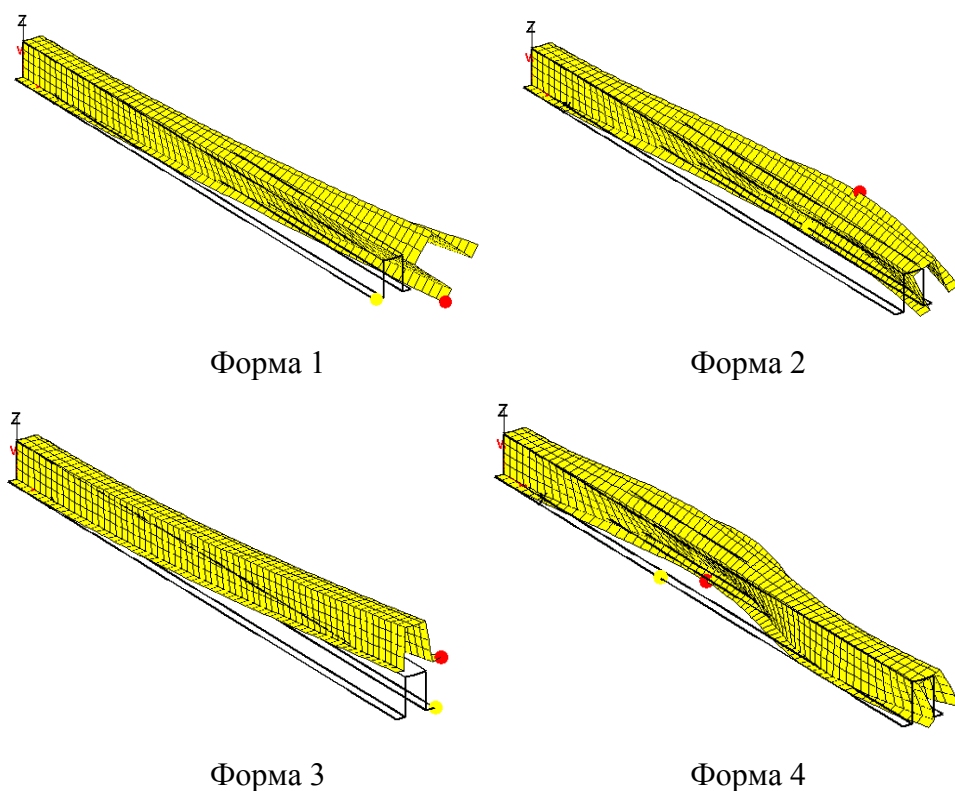


Рис. 6.12.3

7 ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ (НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ)

7.1 Расчет балочной конструкции с односторонними связями

1. Название задачи. Исследование деформированного состояния балки с односторонними связями.

2. Постановка задачи. Рассматривается деформированное состояние шарнирно-опертой балки постоянного поперечного сечения (рисунок 7.1.1) при изменении направления равномерно распределенной нагрузки, две промежуточные опоры балки работают только на сжатие.

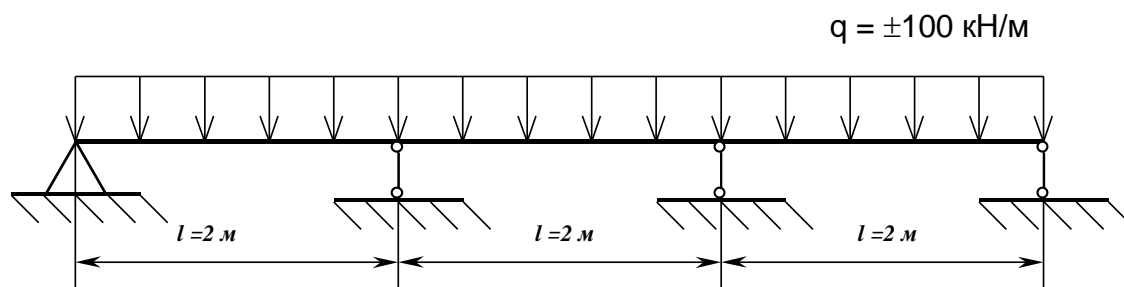


Рисунок 7.1.1

Основные прочностные характеристики:

Материал балки:

$E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Па - модуль упругости,

Поперечное сечение балки:

$F = 1.0 \cdot 10^{-3}$ м² - площадь поперечного сечения,

$J = 25.0 \cdot 10^{-6}$ м⁴ - момент инерции поперечного сечения балки,

$L = 6$ м - общая длина балки.

3. Конечноэлементная модель. Для определения напряженно-деформированного состояния балки с односторонними связями балка разбивалась на 48 балочных 2D элементов.

4. Результаты расчета максимальных перемещений балки с односторонней связью при различных направлениях приложения нагрузки сравнивались с аналитическими [Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений, Расчетно-теоретический. В 2-х кн. Кн. 1. Под ред. А.А.Уманского. – М., Стройиздат, 1972.]. Результаты сравнения приведены в таблице 7.1.1.

Таблица 7.1.1

Вариант приложения нагрузки	Перемещения в центре пролета, мм		Изгибающий момент в центре пролета, кН·м	
	Теория	MicroFe	Теория	MicroFe
$q = 100$ кН/м	337.5	337.5	4500.00	4500.00
$q = -100$ кН/м	21.67	21.67	320.00	320.00

На рисунках 7.1.2 - 7.1.3 представлены форма упругой линии и эпюра изгибающих моментов балки с односторонними связями, работающими только на сжатие, при изменении направления приложения равномерно распределенной нагрузки. Рисунок 7.1.2 соответствует $q = 100$ кН/м, а рисунок 7.1.3 $q = -100$ кН/м.

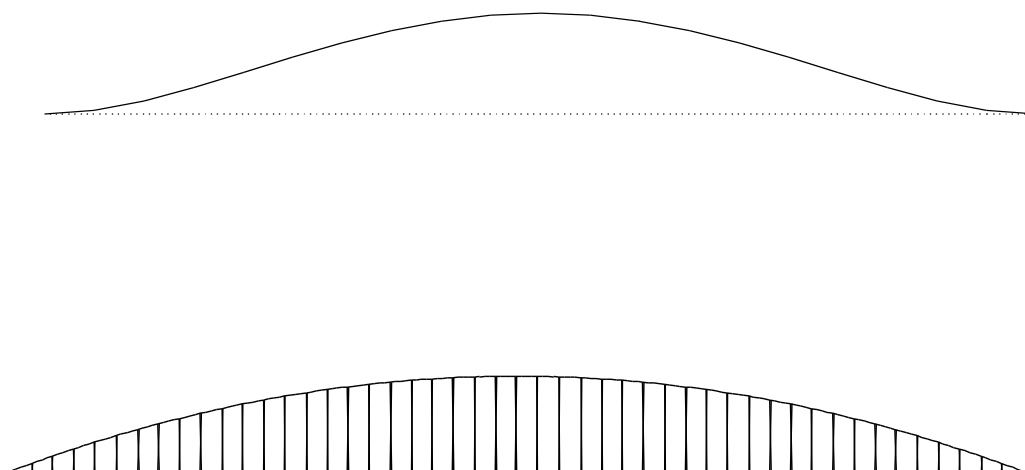
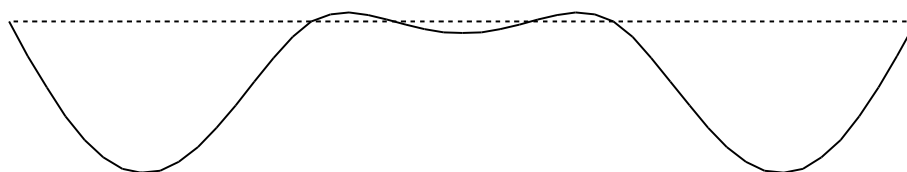


Рисунок 7.1.2



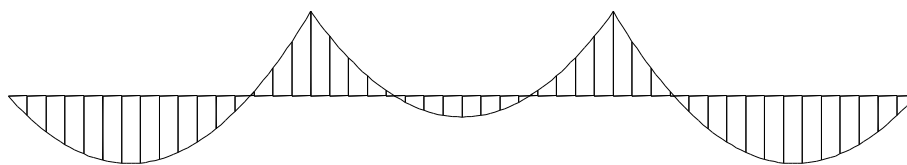


Рисунок 7.1.3

7.2 Жесткая балка на подвесках

1. Название задачи. Перемещения и усилия стержневой системы с учетом нелинейной работы элементов.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Абсолютно жесткая балка на трех подвесках (рис. 7.2.1). Определить: усилия в подвесках и перемещения в точках А, В и С.

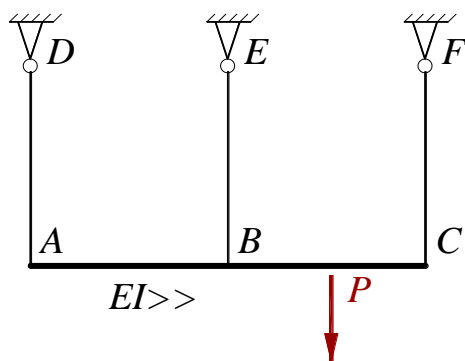


Рис.7.2.1

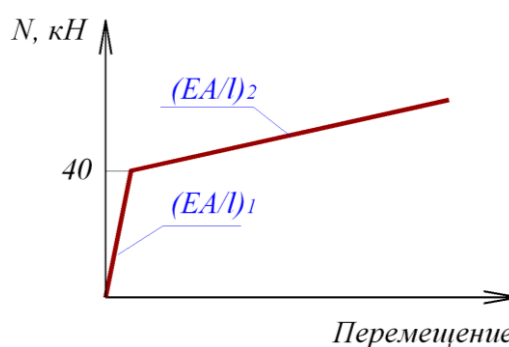


Рис.7.2.2

3. Исходные данные.

$(EA/l)_1 = 21000$ кН/м - начальная жесткость подвесок;

$(EA/l)_2 = 2500$ кН/м - вторичная жесткость подвесок;

$l = 1$ м - длина подвесок и размер пролета балки;

$P = 74.2857$ кН - нагрузка в середине пролета ВС.

4. Конечноэлементная модель. Система представлялась 5 элементами типа «2D-стержень», 9 узлов. Абсолютно жесткая работа балки задавалась группой RIGI типа 1. Нелинейная работа подвесок на растяжения задавалась при помощи односторонних нелинейных связей.

5. Подобласть верификации. Перемещения и усилия при конструктивно и физически нелинейном расчете.

6. Сопоставление результатов. В таблице 7.2.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с результатами аналитического решения [Halphen В., Salencon J. Elastoplasticite. Presses de l'ENPC.].

Таблица 7.2.1

Точка/ Элемент	Величина	Аналитическое решение	Численное решение (MicroFe)	Погрешность, %
AD	N_{AD} , кН	4.16	4.3497	4.56
BE	N_{BE} , кН	28.762	28.4435	1.11
CF	N_{CF} , кН	41.333	41.4925	0.39
A	v_A , мм	-0.1995	-0.2071	3.81
B	v_B , мм	-1.3696	-1.3545	1.10
C	v_C , мм	-2.5397	-2.5018	1.49

7.3 Квадратная плита на одностороннем жестком основании

1. Название задачи. Определение области контакта плиты с односторонним основанием.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная плита на жестком основании, работающем только на сжатие, нагружена симметрично относительно центра плиты по квадрату со стороной 0.8 м – равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 500 кПа. (рис. 7.3.1). Определить: область контакта плиты с основанием.

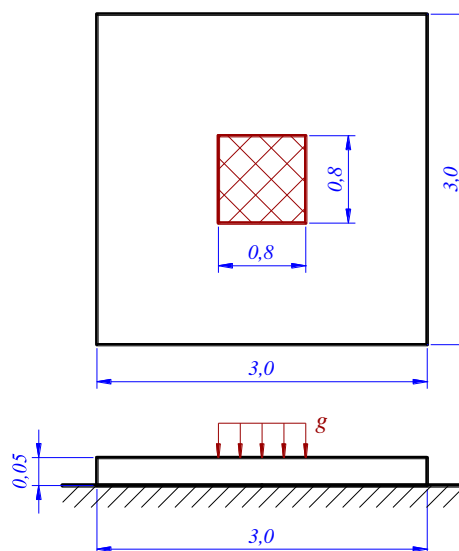


Рис.7.3.1

3. Исходные данные.

$E=4.5 \cdot 10^7$ кПа - модуль упругости плиты;

$\mu=0.2$ - коэффициент Пуассона;

$h = 0.05$ м - толщина плиты.

4. Конечноэлементная модель. Плита представлялась 1600 КЭ плоской оболочки, 1681 узел (сетка 40x40). Во всех узлах заданы жесткие граничные условия по вертикали, работающие только на сжатие.

5. Подобласть верификации. Область контакта при конструктивно нелинейном расчете.

6. Сопоставление результатов. В таблице 7.3.1 представлено сравнение результатов расчета по программе с результатами аналитического решения [Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. – М.: Мир, 1989. С 367.].

Таблица 7.3.1

Величина	Аналитическое решение	Численное решение (MicroFe)
Область контакта	Квадрат со стороной 0.9 м	Квадрат со стороной 0.9 м

7.4 Расчет плоской нити

1. Название задачи. Перемещения и реакции гибкой плоской нити. Источник [А.В. Александров, Б.Я.Лашеников, Н.Н.Шапошников. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. - М.: Стройиздат, 1983].

2. Формулировка задачи. Плоская нить, очерчена по параболе пролетом $L = 100$ м и начальным прогибом $1/10L$ нагружена равномерно распределенной нагрузкой q и сосредоточенной силой в середине пролета P . Определить максимальные перемещения середины пролета и реакции распора.

3. Исходные данные.

- $E = 2.0 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;
- $\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;
- $A = 0.00625$ м² - площадь поперечного сечения;
- $I = 2.60576e-007$ м⁴ - момент инерции;
- $q = 10$ кН/м - равномерно распределенная нагрузка;
- $P = 500, 1000$ кН - сосредоточенная сила в середине пролета.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась стержневая расчетная схема состоящая из 20 пространственных стержневых КЭ, 21- узел. Расчетная схема приведена на рис. 7.4.1.

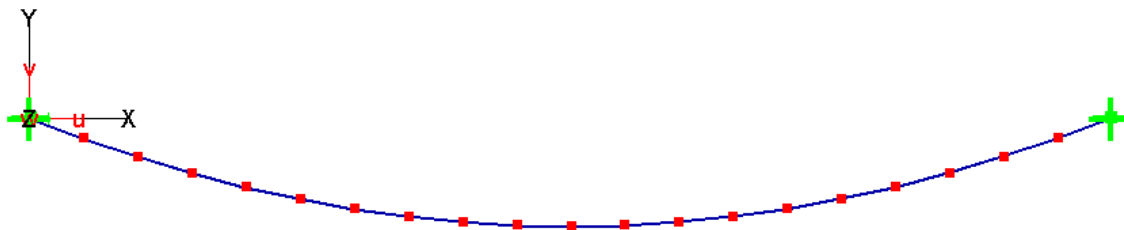


Рис. 7.4.1

5. Результаты решения. В таблице 7.4.1 представлено сравнение результатов расчета для перемещений u_y и распора H по программе с эталонным решением.

Таблица 7.4.1

	$q = 10$ кН/м, $P=500$ кН			$q = 10$ кН/м, $P= 1000$ кН		
	Эталон	MicroFe	Погрешность, %	Эталон	MicroFe	Погрешность, %
u_y , м	1.282	1.292	0.86	1.689	1.680	0.41
H , кН	2204.85	2192.25	0.57	3188.94	3140.84	1.49

7.5 Вантовая система с вертикальными нагрузками

1. Название задачи. Реакции и усилия в вантовой системе. Источник [F.P. Beer, E.R. Johnston, Jr., Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1962, pg. 260, problem 7,8].

2. Формулировка задачи. На вантовую схему АЕ действуют три нагрузки (рис. 7.5.1). Для равновесного состояния схемы необходимо определить горизонтальную A_x и вертикальную A_y реакции опоры в точке А, а также максимальное растяжение в ванте.

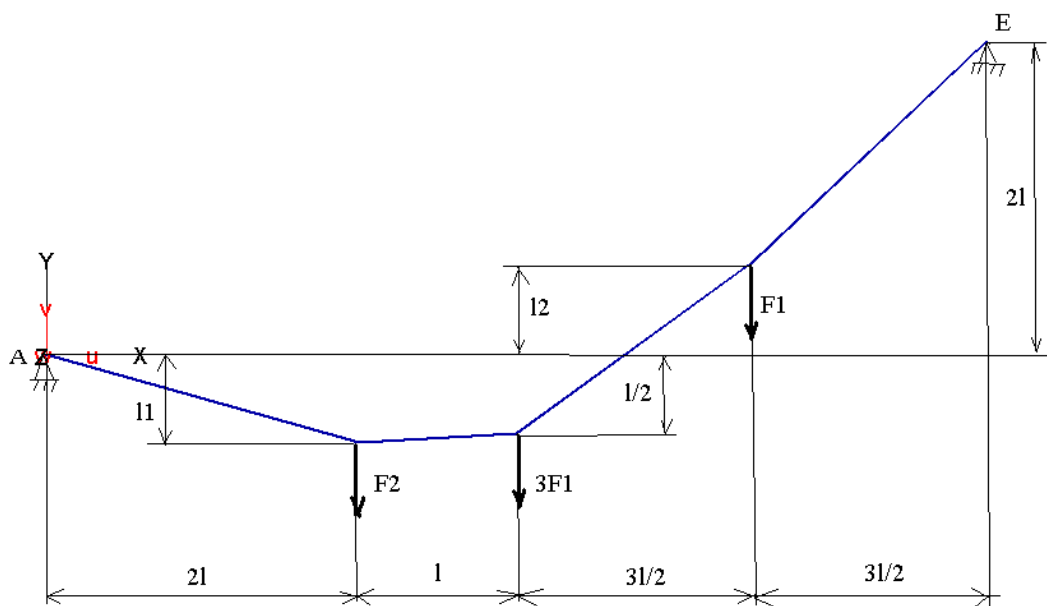


Рис. 7.5.1

3. Исходные данные.

$E = 1.40616 \cdot 10^{11}$ кПа	- модуль упругости;
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$A = 0.092903$ м ²	- площадь поперечного сечения ванты;
$l = 3.048$ м	- габаритный размер;
$l_1 = 1.69469$ м	- габаритный размер;
$l_2 = 1.77698$ м	- габаритный размер;
$F_1 = 18144$ кН	- сосредоточенная сила
$F_2 = 27216$ кН	- сосредоточенная сила.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась два варианта стержневой расчетной схемы состоящих из 4 пространственных стержневых КЭ, 5 узлов. В первом варианте конечные элементы задавались с материалом типа “трос2” (т.е. работающими только на растяжение), а во втором варианте с обычным материалом для стержней. Расчетная схема приведена на рис. 7.5.2.

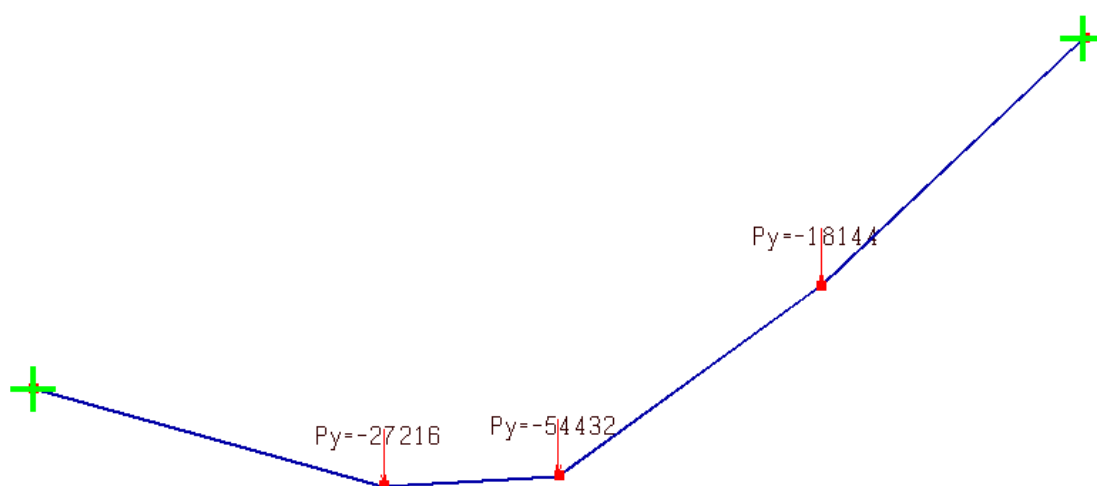


Рис. 7.5.2

5. Результаты решения. Результаты расчета по обоим вариантам расчетных схем полностью совпали. В таблице 7.5.1 представлено сравнение результатов расчета для реакций в точке A и максимального растяжения в вантах T по программе с эталонным решением.

Таблица 7.5.1

	Эталон	MicroFe	Соотношение
A_x , кН	-81648	-81633	1.000
A_y , кН	22680	22684	1.000
T , кН	112320	112293	1.000

7.6 Большие перемещения квадратной мембраны

1. Название задачи. Большие перемещения квадратной мембраны.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Квадратная мембрана, опертая шарнирно по контуру, нагружена по всей поверхности равномерно распределенным давлением интенсивности q ; края мембраны неподвижны (рис. 7.6.1). Определить максимальный прогиб мембраны и напряжения для центра пластинки.

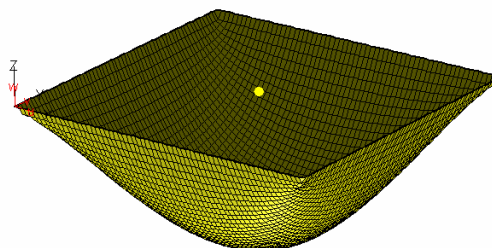


Рис.7.6.1

3. Исходные данные.

$E = 2 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.25$ - коэффициент Пуассона;

$b = 10$ м - размер мембраны;

$h = 0.001$ м - толщина мембраны;

$q = -10$ кН/м² - равномерно распределенное давление.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась оболочечная расчетная схема – мембрана представлялась КЭ плоской оболочки с сеткой 32x32 (1024 КЭ плоской оболочки и 1089 узлов, рис. 7.6.1).

5. Эталонное решение взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968].

$$w = 0.285h^3 \sqrt{(b/h)^4 (q/E)}, \quad \sigma_x = \sigma_y = 3.4E(w/b)^2$$

6. Сопоставление результатов. В таблице 7.6.1 приведены значения перемещений и напряжений в центре мембраны полученные по программе и эталонные значения. Также там приведены отклонения $\bar{w} = w/w^{\text{э}}$ и $\bar{\sigma}_x = \sigma_x/\sigma_x^{\text{э}}$.

Таблица 7.6.1

	w , мм	σ_x , кН/м ²
MicroFe	230.5	340187
Эталон,	226.2	347932
Отклонение	1.019	0.978

7.7 Большие перемещения круглой мембраны

1. Название задачи. Большие перемещения круглой мембраны.

2. Формулировка задачи. Расчетная схема. Круглая мембрана радиуса b нагружена по всей поверхности равномерно распределенным давлением интенсивности q ; контур мембраны не смещается (рис. 7.7.1). Определить максимальный прогиб мембраны и напряжения для центра пластинки.

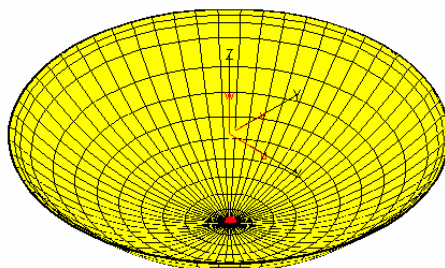


Рис.7.7.1

3. Исходные данные.

$E = 2 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;

$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона;

$b = 10$ м - радиус мембраны;

$h = 0.01$ м - толщина мембраны;

$q = -10$ кН/м² - равномерно распределенное давление.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась оболочечная расчетная схема – мембрана представлялась КЭ плоской оболочки с сеткой 32x32 (1024 КЭ плоской оболочки и 1089 узлов, рис. 7.6.1).

5. Эталонное решение взято из [Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968].

$$w = 0.662b^3\sqrt{(qb/Eh)}, \quad \sigma_r = 0.423\sqrt{(Eq^2b^2)/h^2}$$

6. Сопоставление результатов. В таблице 7.7.1 приведены значения перемещений и напряжений в центре мембраны полученные по программе и эталонные значения. Также там приведены отклонения $\bar{w} = w/w^{\text{э}}$ и $\bar{\sigma}_r = \sigma_r/\sigma_r^{\text{э}}$.

Таблица 7.6.1

	w , мм	σ_r , кН/м ²
MicroFe	248.10	111735
Эталон,	243.88	114820
Отклонение	1.017	0.973

7.8 Большие перемещения Z-образной консоли

1. Название задачи. Большие перемещения пространственной консоли.

2. Формулировка задачи. Z-образная консоль длины $L = 180$, высоты $H = 30$, ширины $W = 20$ и толщины $t = 1.7$ нагружена на свободном краю силой $P_{max} = 4000$. Определить вертикальное перемещение верхней точки консоли (рис. 7.8.1).

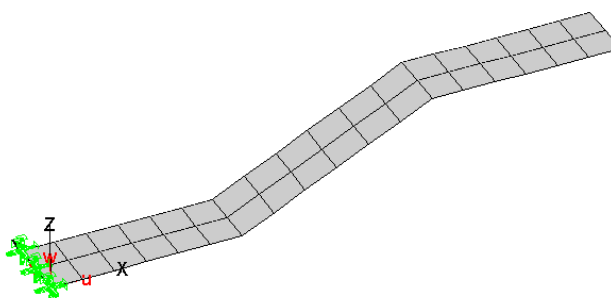


Рис. 7.8.1

3. Исходные данные.

$E = 2 \cdot 10^5$ - модуль упругости;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалось три варианта расчетной схемы. 1-я расчетная схема – стержневая - 18 конечных элемента «3D-стержень» (рис.7.8.2а). 2-я расчетная схема – оболочечная - 36 конечных элементов плоской оболочки (рис.7.8.2б). 3-я расчетная схема – объемная - 36 объемных конечных элементов теории упругости (рис.7.8.2с).

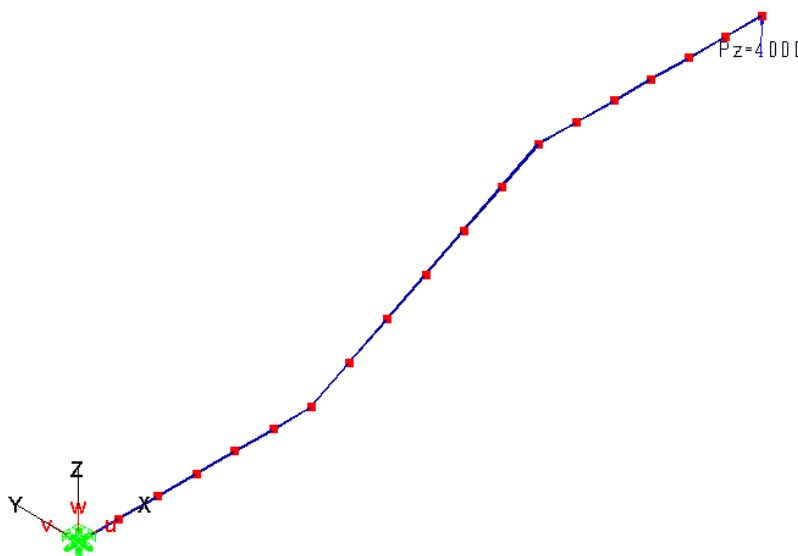


Рис.7.8.2а

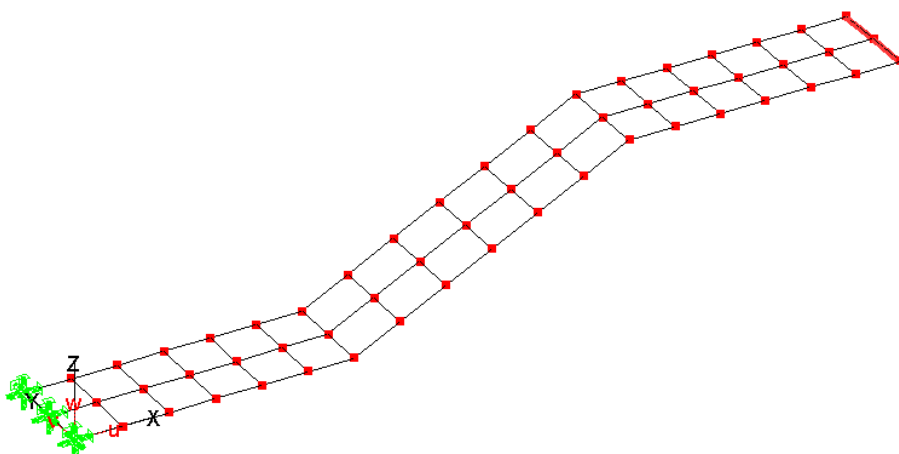


Рис.7.8.2b

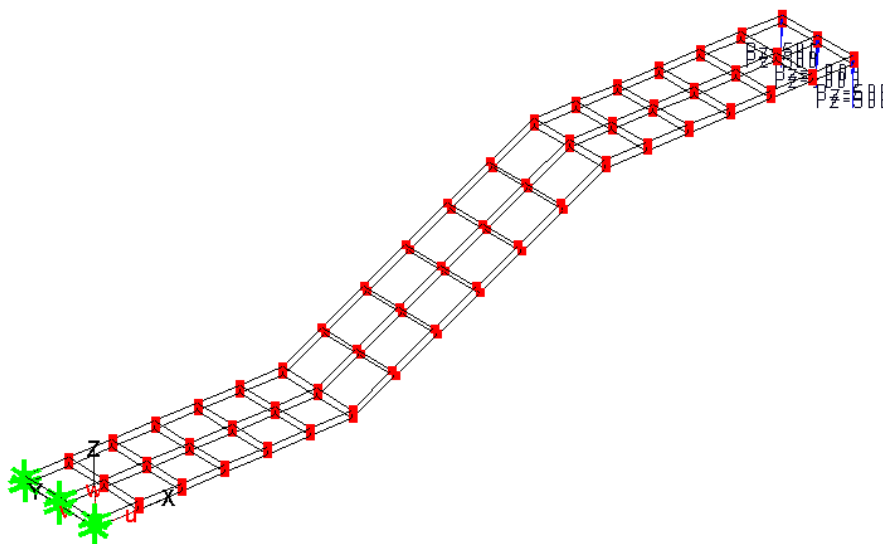


Рис.7.8.2c

5. Эталонное решение для вертикального перемещения верхней точки консоли взято по данным NAFEMS.

6. Сопоставление результатов. В таблице 7.8.1 приведено значение вертикального перемещения полученное для различных расчетных схем по программе и эталонное значение. Также там приведено $\bar{w} = w/w^{\text{Э}}$. Как видно из таблицы для всех схем имеем прекрасное соответствие результатов эталонным значениям. На рис. 7.8.3 приведены исходные и деформированные состояния для различных расчетных схем.

Таблица 7.8.1

	Стержневая схема	Оболочечная схема	Объемная схема
MicroFe	142.23	141.69	141.12
Эталон	143.43	143.43	143.43
\bar{w}	0.992	0.988	0.984

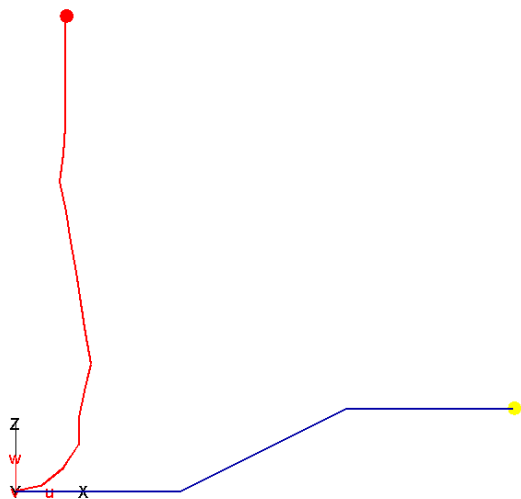


Рис. 7.8.3а (стержневая схема)

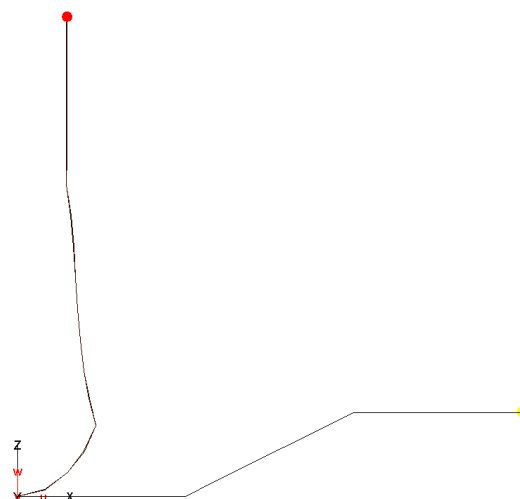


Рис. 7.8.3б (оболочечная схема)

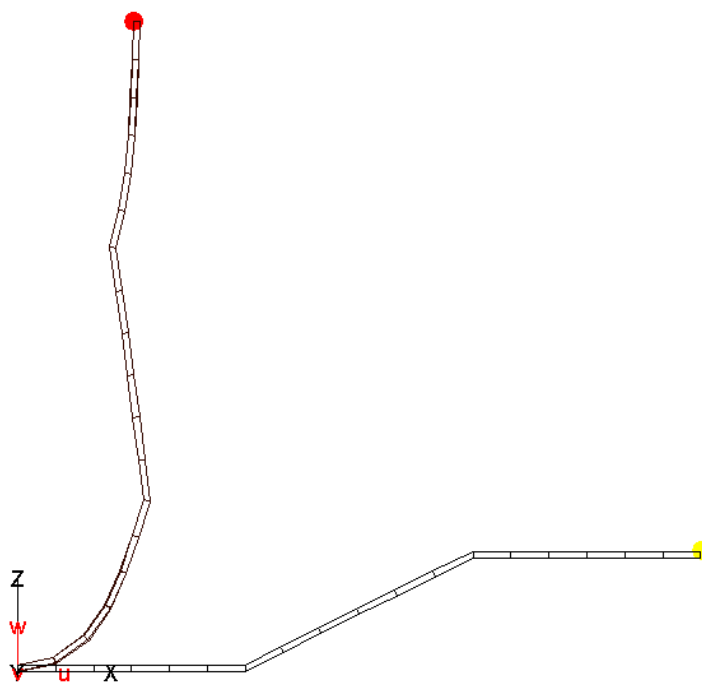


Рис. 7.8.3с (объемная схема)

7.9 Большие перемещения защемленной круговой арки

1. Название задачи. Большие перемещения защемленной круговой арки.

2. Формулировка задачи. Защемленная круговая арка радиусом $R = 41$ и углом раствора $\alpha = 180^\circ$, поперечным сечением шириной $b=1$ и толщиной $h = 0.5$ нагружена посередине сосредоточенной силой $P_{max} = -2000$. Определить вертикальное перемещение точки посередине арки (рис. 7.9.1).

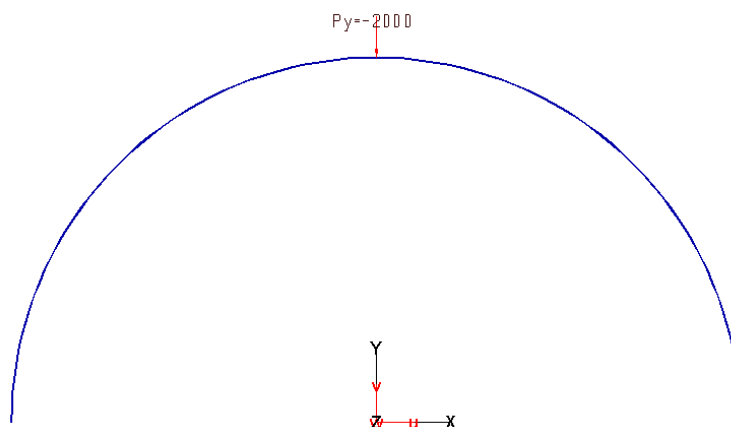


Рис. 7.9.1

3. Исходные данные.

$E = 3 \cdot 10^7$ - модуль упругости;

$\mu = 0.2$ - коэффициент Пуассона.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалось два варианта расчетной схемы. 1-я расчетная схема – стержневая - 80 конечных элемента «3D-стержень». 2-я расчетная схема – оболочечная - 160 конечных элементов плоской оболочки.

5. Эталонное решение для вертикального перемещения верхней точки консоли взято по данным NAFEMS.

6. Сопоставление результатов. В таблице 7.9.1 приведено значение вертикального перемещения полученное для различных расчетных схем по программе и эталонное значение. Также там приведено $\bar{w} = w/w^{\text{Э}}$. На рис. 7.9.2 приведены исходные и деформированные состояния для различных расчетных схем.

Таблица 7.9.1

	Стержневая схема	Оболочечная схема
MicroFe	66.02	66.09
Эталон	66.07	66.07
\bar{w}	0.999	1.000

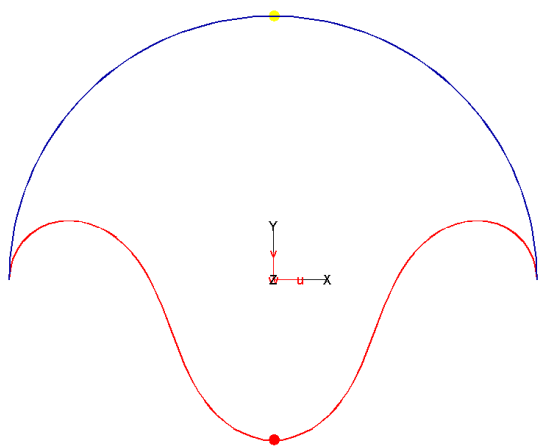


Рис. 7.9.2а (стержневая схема)

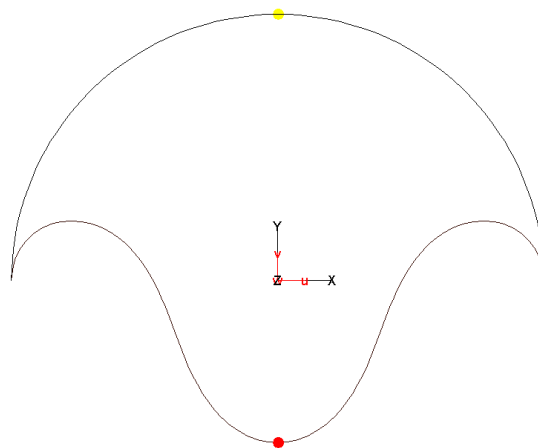


Рис. 7.9.2б (оболочечная схема)

7.10 Изгиб полосы в цилиндрическую оболочку

1. Название задачи. Большие перемещения консоли.

2. Формулировка задачи. К прямоугольной пластинке защемленной одним краем к противоположному краю приложен изгибающий момент. Определить горизонтальное перемещение точек на краю с моментом (рис. 7.10.1).

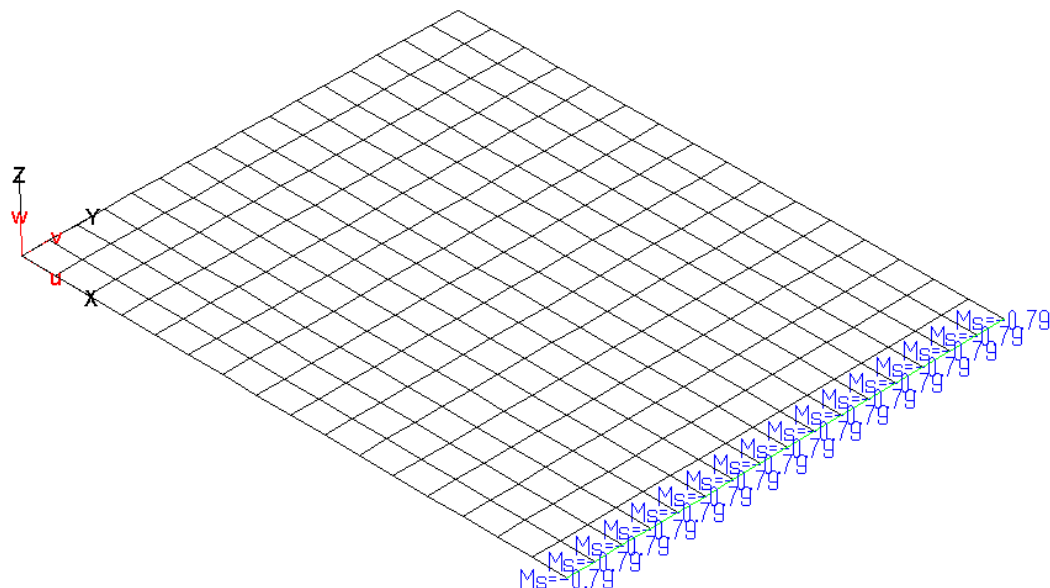


Рис. 7.10.1

3. Исходные данные.

$E = 100$	- модуль упругости;
$\mu = 0$	- коэффициент Пуассона;
$L = 10$ м	- длина плиты;
$B = 8$ м	- ширина плиты;
$H = 0.533$ м	- толщина плиты;
$m = -0.785$ кНм/м	- интенсивность изгибающего момента.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалось две расчетных схемы. 1-я расчетная схема – стержневая - 16 конечных элементов «3D-стержень». 2-я расчетная схема – оболочечная - 256 конечных элементов плоской оболочки.

5. Эталонное решение для горизонтального перемещения точек на краю с моментом взято по [Лурье А.И. Нелинейная теория упругости- М.: Наука, 1980].

6. Сопоставление результатов. В таблице 7.10.1 приведено значение горизонтального перемещения полученное для различных расчетных схем по программе и эталонное значение. Также там приведено $\bar{w} = w / w^{\text{э}}$. На рис. 7.10.2 приведены исходные и деформированные состояния для различных расчетных схем.

Таблица 7.10.1

	Стержневая схема	Оболочечная схема
MicroFe	9.911	10.012
Эталон	10.000	10.000
\bar{w}	0.991	1.001

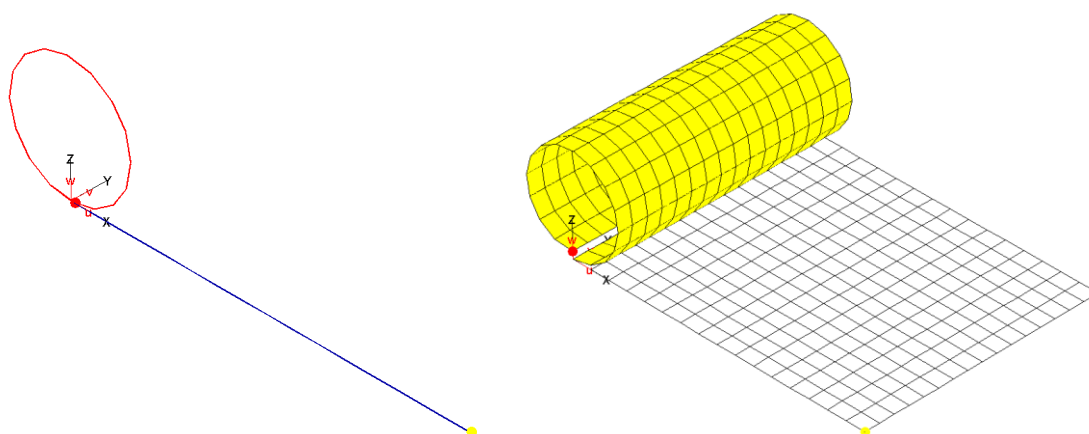


Рис. 7.10.2а (стержневая схема) Рис. 7.10.2б (оболочечная схема)

7.11 Пластическое сжатие соосных труб

1. Название задачи. Статический расчет с учетом пластики. Источник [S.H. Crandall, N.C. Dahl, An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1959, pg. 180, ex. 5.1]

2. Формулировка задачи. Даны две трубы с совпадающей осью. Внутренняя труба из стали марки 1020 CR имеет площадь поперечного сечения A_s . Внешняя труба из алюминиевого сплава марки 2024-T4 и имеет площадь поперечного сечения A_a . Трубы зажаты между гладкими плитами. Принимаем, что плиты настолько жесткие, что обе трубы укорачиваются на одну и ту же величину. Определить зависимость реакций от смещений верхней плиты.

3. Исходные данные.

$E_s = 1.88953 \cdot 10^8$ кПа	- модуль упругости стальной трубы;
$\sigma_{T,s} = 604650$ кН/м ²	- предел текучести стали;
$E_a = 7.7339 \cdot 10^7$ кПа	- модуль упругости алюминиевой трубы;
$\sigma_{T,a} = 386695$ кН/м ²	- предел текучести алюминия;
$\mu = 0.3$	- коэффициент Пуассона;
$L = 0.254$ м	- длина труб;
$A_s = 4516.12$ мм ²	- площадь поперечного сечения стальной трубы;
$A_a = 7741.92$ мм ²	- площадь поперечного сечения алюминиевой трубы;
$r_s = 50.2455$ мм	- внутренний радиус стальной трубы;
$h_s = 12.7$ мм	- толщина стенки стальной трубы;
$r_a = 90.6708$ мм	- внутренний радиус алюминиевой трубы;
$h_a = 12.7$ мм	- толщина стенки алюминиевой трубы;
$\delta_1 = 0.8128$ мм	- смещение плиты на 1-м шаге;
$\delta_2 = 1.27$ мм	- смещение плиты на 2-м шаге;
$\delta_3 = 2.54$ мм	- смещение плиты на 3-м шаге;

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалось две расчетных схемы. 1-я расчетная схема – стержневая - 8 конечных элементов «3D-стержень» со слоистым материалом. 2-я расчетная схема – оболочечная - 6400 конечных элементов плоской оболочки со слоистым материалом (сетка 40x80). Для первой расчетной схемы использовалось 5 слоев по высоте сечения, для второй расчетной схемы – 5 слоев по высоте сечения.

5. Результаты расчета. В таблице 7.11.1 приведены значения вертикальных реакций полученные для различных расчетных схем по программе и их отклонения $\bar{R} = R_z / R_z^{\text{Э}}$.

Таблица 7.11.1

δ_1 , мм	Стержневая схема		Оболочечная схема		Эталон $R_z^{\text{Э}}$, кН
	R_z , кН	\bar{R}	R_z , кН	\bar{R}	
0.8128	4646.50	1.020	4621.88	1.014	4556.83
1.27	5724.25	1.020	5678.70	1.012	5613.75
2.54	5724.25	1.020	5875.98	1.047	5613.75

7.12 Изгиб железобетонной плиты опертой в четырех точках

1. Название задачи. Статический расчет с учетом физической нелинейности. Источник [Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. - М.: Изд-во АСВ, 2004].

2. Формулировка задачи. Расчет железобетонной плиты, опертой четырех точках и нагруженной сосредоточенной силой (рис.7.12.1). Определить перемещения в центре плиты от нагрузки.

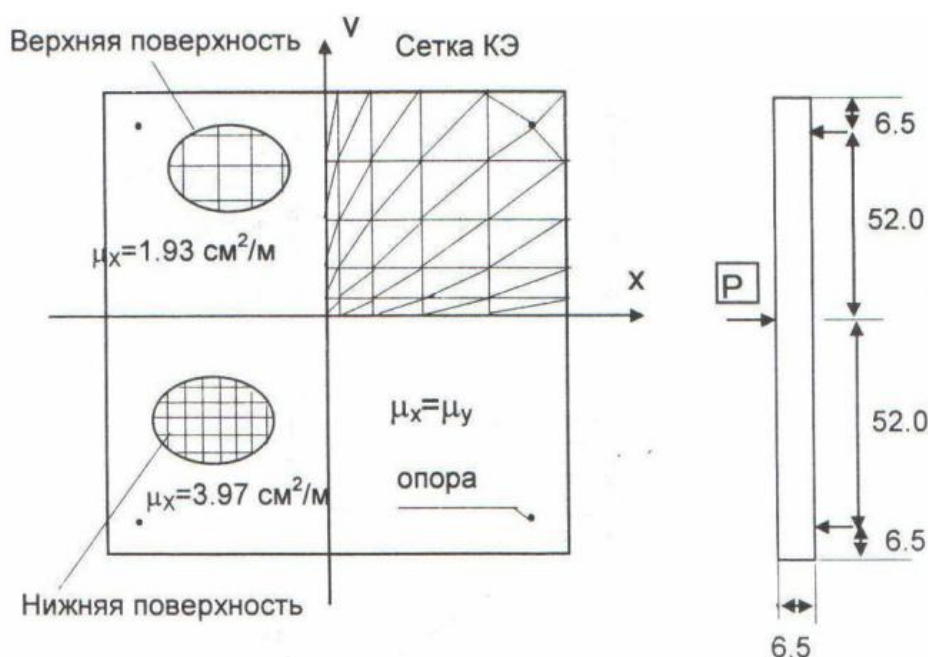


Рис.7.12.1

3. Конечнoэлементная модель и исходные данные. Рассматривалась оболочечная расчетная схема - 324 конечных элементов плоской оболочки со слоистым материалом (сетка 18x18). Для многослойной оболочки использовалось 50 слоев по высоте сечения – 48 слоев бетона и 2 слоя арматуры. Характеристики материалов бетона и арматуры приведены на рис.7.12.2.

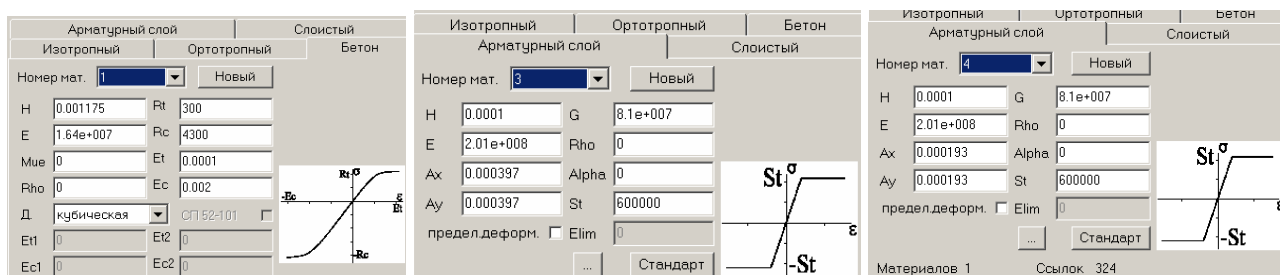


Рис.7.12.2

5. Результаты расчета. В таблице 7.12.1 приведены значения вертикальных перемещений центра плиты полученные расчетом по программе. На рис. 7.12.3 приведен график зависимости прогиба в центре плиты от нагрузки, заимствованный из [Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. -М.: Изд-во АСВ, 2004]. Красными точками нанесены значения из табл. 7.12.3.

Таблица 7.12.1

P , кН	10	20	30	40	44	45
w , мм	1.94	4.31	7.07	11.12	14.85	16.74

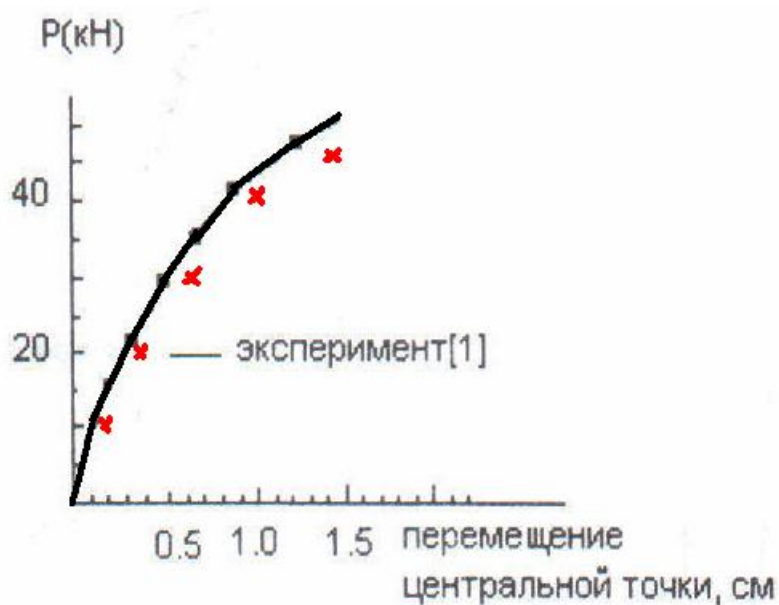


Рис.7.12.3

7.13 Физически нелинейная устойчивость стальной колонны

1. Название задачи. Анализ устойчивости стальной колонны с учетом физической нелинейности. Источник [Грудев И.Д. Устойчивость стержневых элементов в составе стальных конструкций. М., Изд-во “МИК”, 2005].

2. Формулировка задачи. Расчет стальной колонны с учетом физической нелинейности (рис.7.13.1). Сечение колонны два спаренных уголка (тавр). Значение стрелки начальной погиби принять равным $e = l/750$ для двух случаев – погибь e_1 в сторону пера тавра и погибь e_2 в сторону полки тавра. Определить максимальную сжимающую нагрузку. Диаграмму стали принять как на рис. 7.13.2.

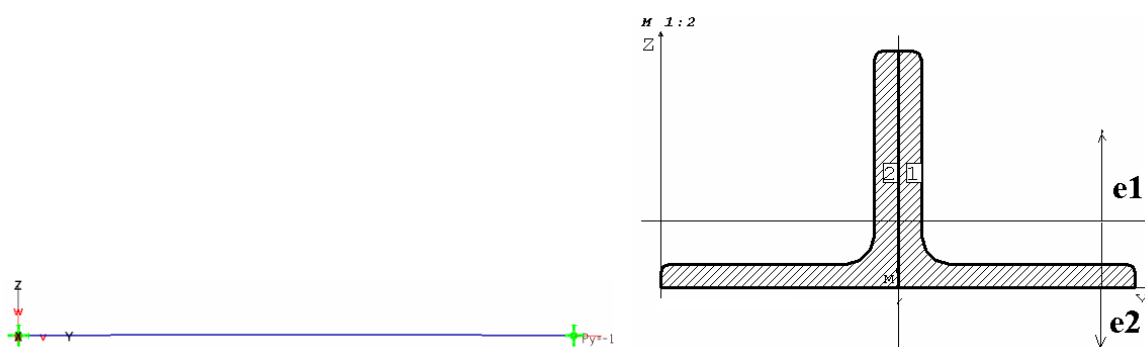


Рис.7.13.1

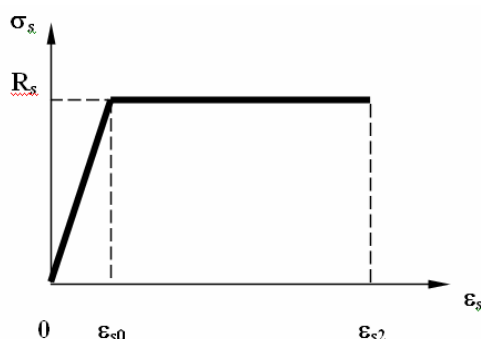


Рис.7.13.2

3. Исходные данные.

$$E_s = 2.1 \cdot 10^8 \text{ кПа}$$

- модуль упругости;

$$R_s = 210 \text{ МПа}$$

- предел текучести стали;

$$\mu = 0.3$$

- коэффициент Пуассона;

$$L = 1.54 \text{ м}$$

- длина стержня;

2 уголка L 50x5 по ГОСТ 8509-93 - сечение стержня;

Крайевые условия

- шарнирное опирание по концам стержня.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась стержневая расчетная схема - 72 конечных элемента со слоистым материалом. Начальная погиб задавалась несовершенствами.

Для многослойного материала использовалось 57 слоев по высоте сечения – 10 слоев для полки шириной 100 мм и 47 слоев для стенки.

5. Результаты расчета. В таблице 7.13.1 приведены результаты расчета для различных вариантов. Первая строка таблицы соответствует решению задачи на собственные значения линейной устойчивости в MicroFe. Вторая строка таблицы соответствует решению задачи на собственные значения с учетом физической нелинейности при помощи алгоритма корректировки модулей упругости в MicroFe. Третья строка таблицы соответствует прямому решению физически и геометрически нелинейной задачи в MicroFe. Четвертая строка таблицы соответствует решению, полученному в результате линейного статического расчета и дальнейшего конструктивного расчета по СНиП II-21-83* в рамках MicroFe. Пятая строка таблицы соответствует решению этой задачи, приведенному в [Грудев И.Д. Устойчивость стержневых элементов в составе стальных конструкций. М., Изд-во “МИК”, 2005]. Шестая строка таблицы соответствует решению, полученному в результате линейного статического расчета и дальнейшего конструктивного расчета по ЕС3 и DIN 18 800 в рамках MicroFe.

Таблица 7.13.1

P_{max} , кН	$e = e_1$	$e = e_2$
Линейно упругая устойчивость	197	197
Физически нелинейная устойчивость	144	144
Геометрически и физически нелинейный расчет	121	142
Линейный статический расчет+конструктивный расчет по СНиП II-21-83*	118	142
Грудев И.Д. [49]	117	138
Линейный статический расчет+конструктивный расчет по ЕС3 и DIN 18 800	108	108

Ниже в таблицах 7.13.2 и 7.13.3 приведены результаты решения аналогичной задачи при следующих данных:

$E_s = 2.1 \cdot 10^8$ кПа - модуль упругости;

$R_s = 240$ МПа - предел текучести стали;

$\mu = 0.3$ - коэффициент Пуассона;

$L = 3.0$ м - длина стержня;

2 уголка L 100x10 по ГОСТ 8509-93 - сечение стержня;

Краевые условия - защемление по концам стержня (на правом торце подвижная заделка) и шарнирное опирание.

В таблице 7.13.2 результаты решения для защемления по концам стержня, в таблице 7.13.3 – для шарнирно опертого стержня. Как и ранее первая строка таблиц соответствует решению задачи на собственные значения линейной устойчивости в MicroFe. Вторая строка таблиц соответствует решению задачи на собственные значения с учетом физической нелинейности при помощи алгоритма корректировки модулей упругости в MicroFe. Третья строка таблиц соответствует прямому решению физически и геометрически нелинейной задачи в MicroFe. Четвертая строка таблиц соответствует решению, полученному в результате линейного статического расчета и дальнейшего конструктивного расчета по СНиП II-21-83* в рамках MicroFe. Пятая строка таблиц соответствует решению, полученному в результате линейного статического расчета и дальнейшего конструктивного расчета по EC3 и DIN 18 800 в рамках MicroFe.

Таблица 7.13.2

P_{max} , кН	$e = e_1$	$e = e_2$
Линейно упругая устойчивость	3208	3208
Физически нелинейная устойчивость	870	870
Геометрически и физически нелинейный расчет	837	852
Линейный статический расчет+конструктивный расчет по СНиП II-21-83*	791	854
Линейный статический расчет+конструктивный расчет по EC3 и DIN 18 800	758	758

Таблица 7.13.3

P_{max} , кН	$e = e_1$	$e = e_2$
Линейно упругая устойчивость	802	802
Физически нелинейная устойчивость	698	698
Геометрически и физически нелинейный расчет	525	635
Линейный статический расчет+конструктивный расчет по СНиП II-21-83*	523	627
Линейный статический расчет+конструктивный расчет по EC3 и DIN 18 800	466	466

7.14 Предельное равновесие стальной рамы

1. Название задачи. Предельное равновесие статически неопределимой рамы (рис. 7.14.1). Источник [Каркаускас Р.П., Крутинис А.А., Аткачюнас Ю.Ю., Каланта С.А., Нагавичюс Ю.А. Строительная механика. Программы и решения задач на ЭВМ.- М.: Стройиздат, 1990].

2. Формулировка задачи. Для дважды статически неопределимой рамы (рис. 7.14.1) определить разрушающую нагрузку и построить эпюру изгибающих моментов, соответствующую этой нагрузке.

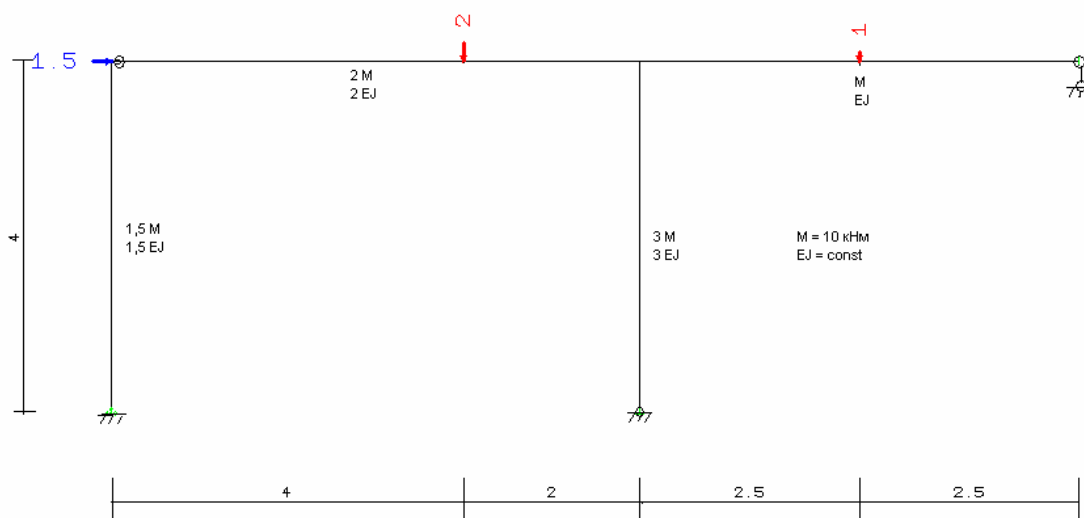


Рис.7.14.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривалась плоская стержневая расчетная схема.

4. Результаты расчета. В таблице 7.14.1 приведены значения параметра предельной нагрузки $p_{пред}$ (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонное значение. На рис. 7.14.2 приведены зоны образования пластических шарниров, а на рис. 7.14.3 приведены эпюры изгибающих моментов в предельном состоянии.

Таблица 7.14.1

	MicroFe	Эталон
$p_{пред}$	6.57	6.47

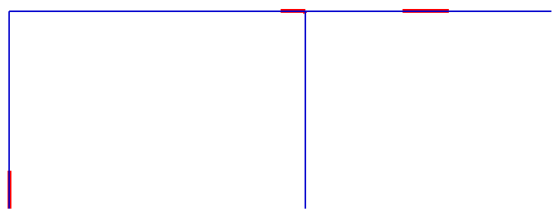


Рис.7.14.2

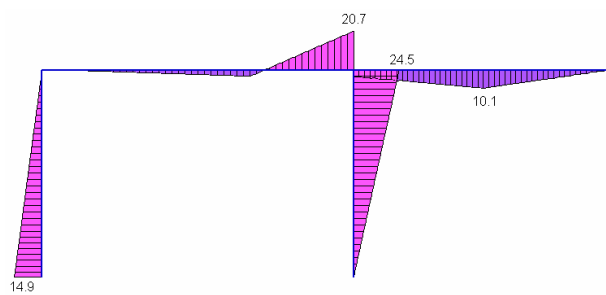


Рис.7.14.3

7.15 Предельное равновесие балочной решетки

1. Название задачи. Предельное равновесие балочной решетки (рис. 7.15.1). Источник [Тихий М., Ракосник Й. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. - М.: Стройиздат, 1976].

2. Формулировка задачи. Для балочной решетки плоской геометрии, нагруженной сосредоточенной силой перпендикулярной плоскости решетки (рис. 7.15.1) определить предельную нагрузку и построить эпюру изгибающих моментов, соответствующую этой нагрузке.

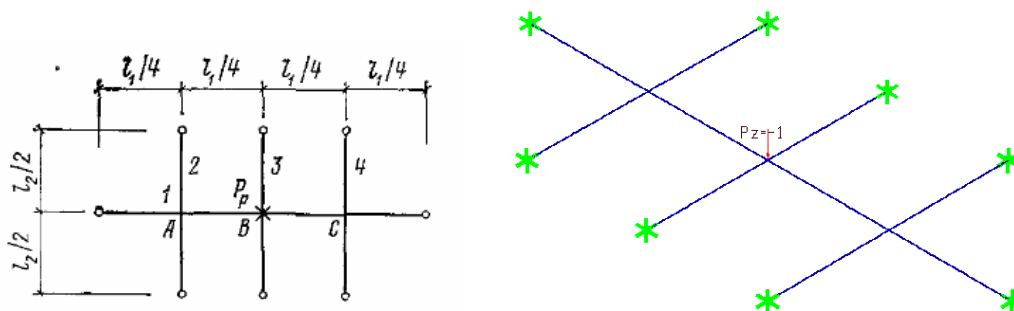


Рис.7.15.1

3. Исходные данные.

- $l_1 = 16$ м - длина решетки;
- $l_2 = 8$ м - ширина решетки;
- $M_{l1} = 16$ кНм - предельный момент для продольного стержня;
- $M_{l2} = 8$ кНм - предельный момент для поперечных стержней.

4. Конечноэлементная модель. Рассматривалась пространственная стержневая расчетная схема. Крайние узлы стержней решетки шарнирно оперты.

5. Результаты расчета. В таблице 7.15.1 приведены значения параметра предельной нагрузки $p_{пред}$ (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонное значение. На рис. 7.15.2 приведены зоны образования пластических шарниров, а на рис. 7.15.3 приведены эпюры изгибающих моментов в предельном состоянии.

Таблица 7.15.1

	МікроFe	Эталон
$P_{пред}$	12.01	12.00

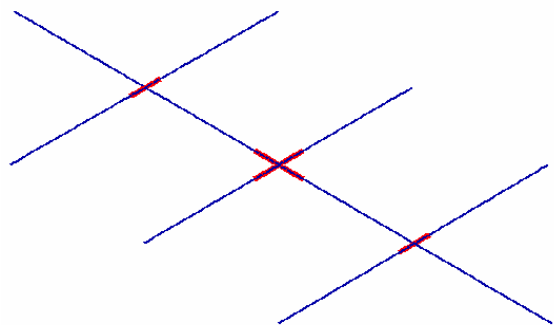


Рис.7.15.2

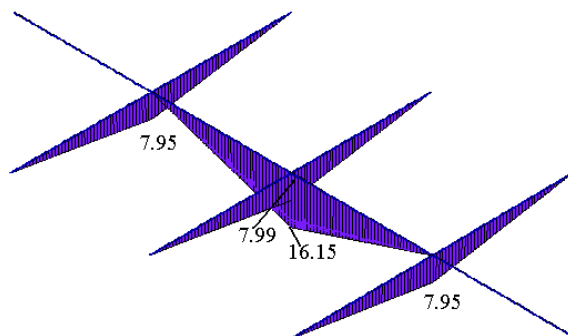


Рис.7.15.3

7.16 Предельное равновесие железобетонной рамы

1. Название задачи. Предельное равновесие железобетонной рамы (рис. 7.16.1).
Источник [Тихий М., Ракосник Й. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. -М.: Стройиздат, 1976].

2. Формулировка задачи. Для однопролетной рамы с защемленными стойками, нагруженной вертикальной сосредоточенной силой в середине балки и горизонтальной сосредоточенной силой узле соединения балки и левой стойки (рис. 7.16.1) определить предельную нагрузку и построить эпюру изгибающих моментов, соответствующую этой нагрузке. Длина рамы 6м, высота – 3м. Распределение предельных моментов и их значения показаны на рисунке. Соотношение внешних нагрузок $P/H = 3$.

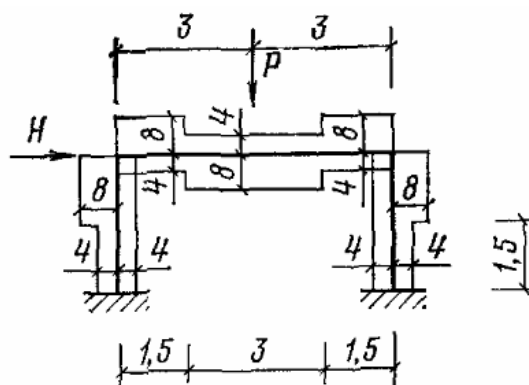


Рис.7.16.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривалась плоская стержневая расчетная схема.

4. Результаты расчета. В таблице 7.16.1 приведены значения предельных нагрузок полученные расчетом по программе и эталонное значение. На рис. 7.16.2 приведены зоны образования пластических шарниров, а на рис. 7.16.3 приведены эпюры изгибающих моментов в предельном состоянии. Для сравнения на рис. 7.16.4 приведена эталонная эпюра моментов из [Тихий М., Ракосник Й. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. -М.: Стройиздат, 1976].

Таблица 7.16.1

	MicroFe	Эталон
$P_{пред}$	9.75	9.81
$H_{пред}$	3.25	3.27

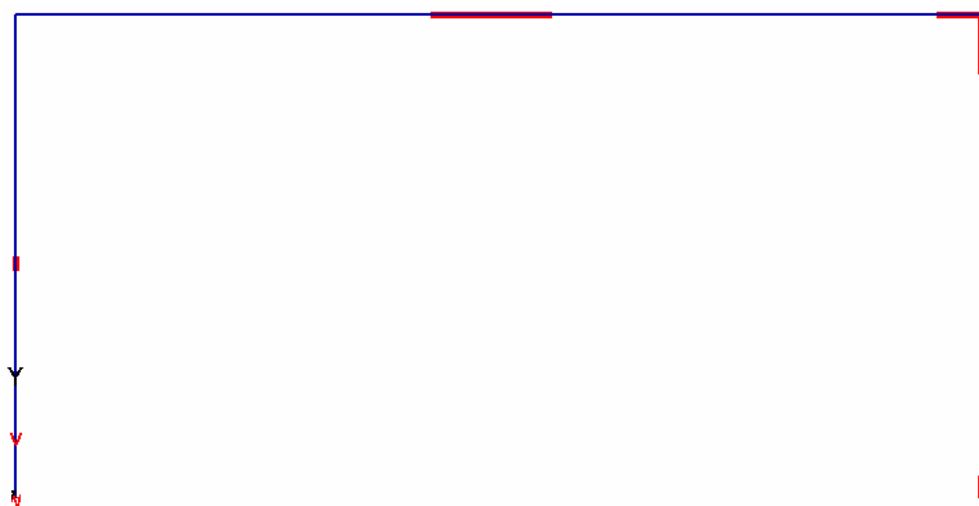


Рис.7.16.2

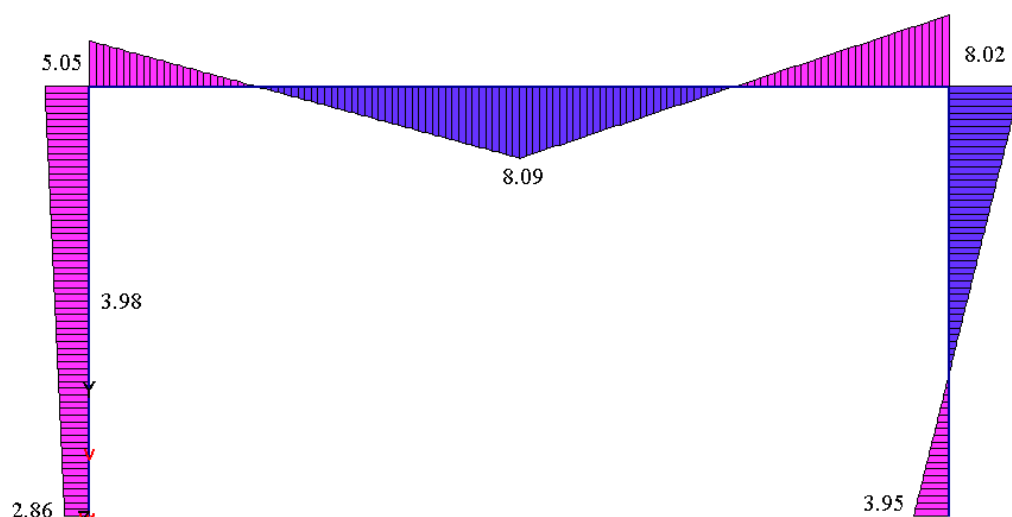


Рис.7.16.3

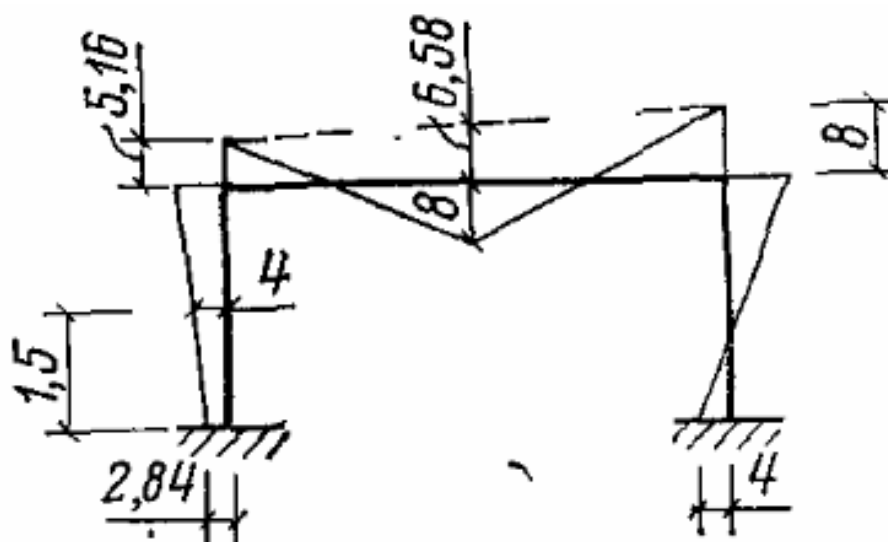


Рис.7.16.4

7.17 Предельное равновесие арки

1. Название задачи. Предельное равновесие арки (рис. 7.17.1). Источник [Чирас А.А. Строительная механика. Теория и алгоритмы.- М.: Стройиздат, 1989].

2. Формулировка задачи. Для круговой арки, нагруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой $q = 1 \text{ кН/м}$ (рис. 7.17.1) определить предельную нагрузку. Сечение арки – идеальной формы, для которого предельный момент $M_{пред} = 60 \text{ кНм}$, $N_{пред} = 120 \text{ кН}$.

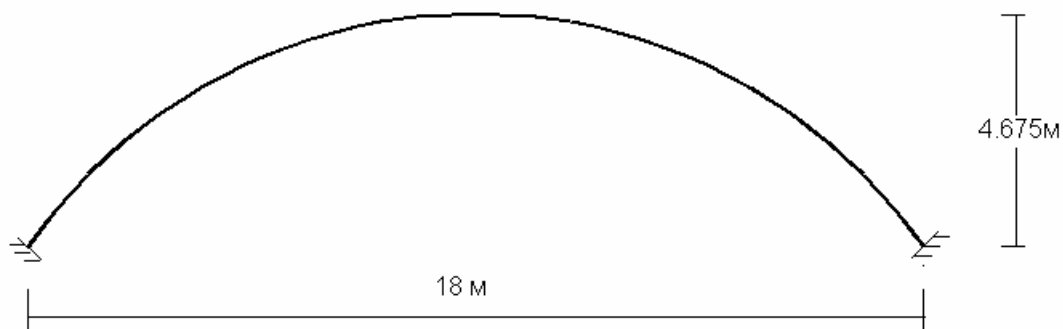


Рис.7.17.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривалась плоская стержневая расчетная схема.

4. Результаты расчета. В таблице 7.17.1 приведены значения параметра предельной нагрузки $p_{пред}$ (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонное значение. При решении использовалось следующее условие текучести

$$\left| M / M_{пред} \right| + \left| N / N_{пред} \right| = 1$$

Таблица 7.17.1

	MicroFe	Эталон
$p_{пред}$	9.03	9.25

7.18 Предельное равновесие опертой квадратной плиты

1. Название задачи. Предельное равновесие квадратной плиты (рис. 7.18.1). Источник [Ржаницин А.Р. Предельное равновесие пластин и оболочек.-М.:Наука,1989].

2. Формулировка задачи. Для квадратной плиты шарнирно опертой по контуру и нагруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой $q = 1кН / м^2$ (рис. 7.18.1) определить предельную нагрузку. Предельный момент $M_{пред} = 100кНм$, длина стороны плиты 10м.

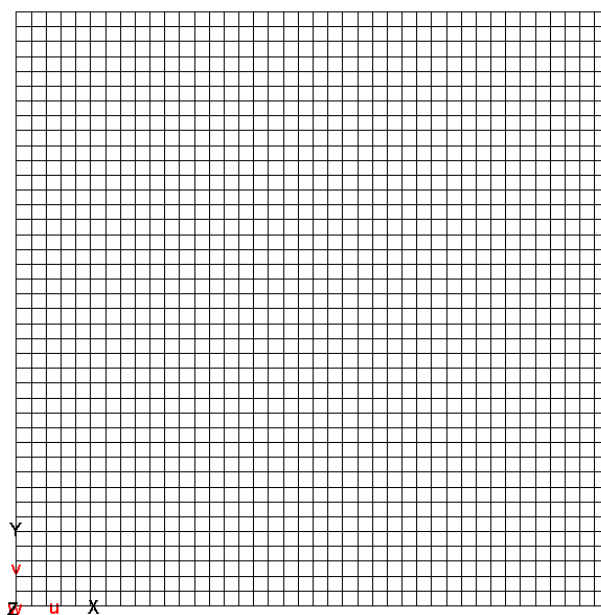


Рис.7.18.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривалась расчетная схема 40x40.

4. Результаты расчета. В таблице 7.18.1 приведены значения параметра предельной нагрузки $p_{пред}$ (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонное значение. На рис. 7.18.2 приведены зоны образования пластических шарниров. При решении использовалось следующее условие текучести

$$(M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2) / M_{пред}^2 = 1.$$

Таблица 7.18.1

	MicroFe	Эталон
$p_{пред}$	24.09	24.00

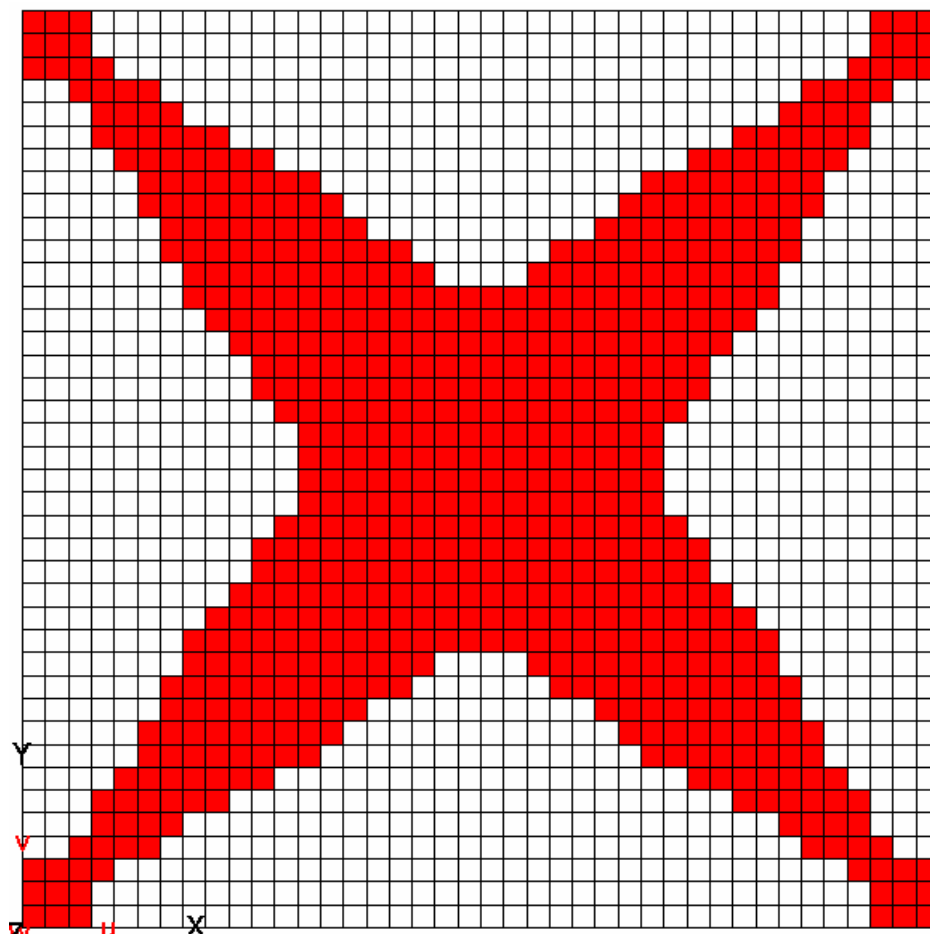


Рис.7.18.2

7.19 Предельное равновесие прямоугольной плиты

1. Название задачи. Предельное равновесие прямоугольной плиты (рис. 7.19.1).
Источник [Чирас А.А. Строительная механика. Теория и алгоритмы.- М.: Стройиздат, 1989].

2. Формулировка задачи. Для прямоугольной плиты шарнирно опертой по вертикальным кромкам, защемленным горизонтальным кромкам и нагруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой $q = 1 \text{ кН} / \text{м}^2$ (рис. 7.19.1) определить предельную нагрузку. Предельный момент $M_{пред} = 100 \text{ кНм}$, Длина горизонтальной стороны плиты 15 м, длина вертикальной стороны плиты 10 м.

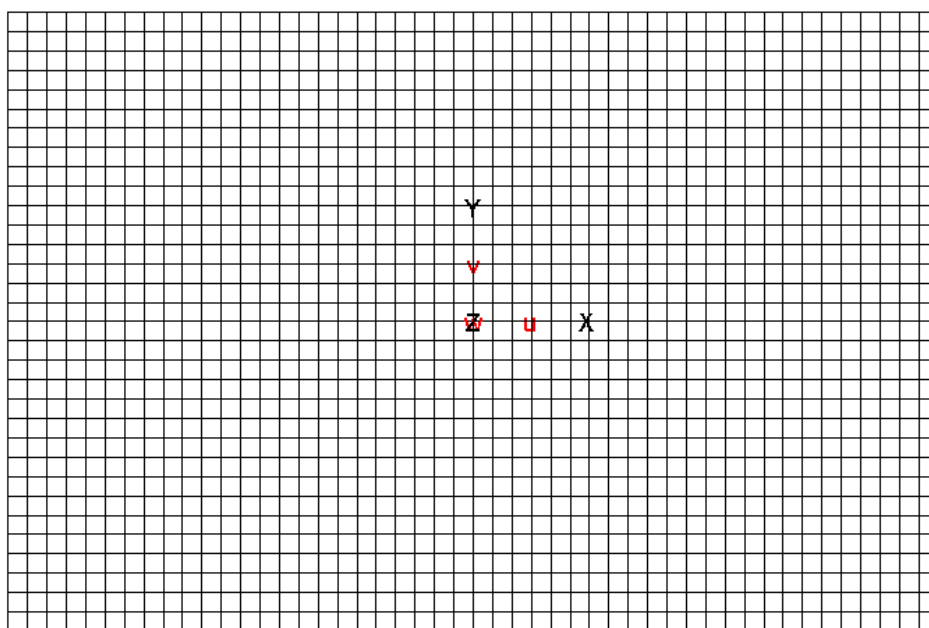


Рис.7.19.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривалась расчетная схема 48x32.

4. Результаты расчета. В таблице 7.19.1 приведены значения параметра предельной нагрузки $p_{пред}$ (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонное значение. На рис. 7.19.2 приведены зоны образования пластических шарниров. При решении использовалось следующее условие текучести

$$(M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2) / M_{пред}^2 = 1.$$

Таблица 7.19.1

	MicroFe	Эталон
$p_{пред}$	26.44	28.95

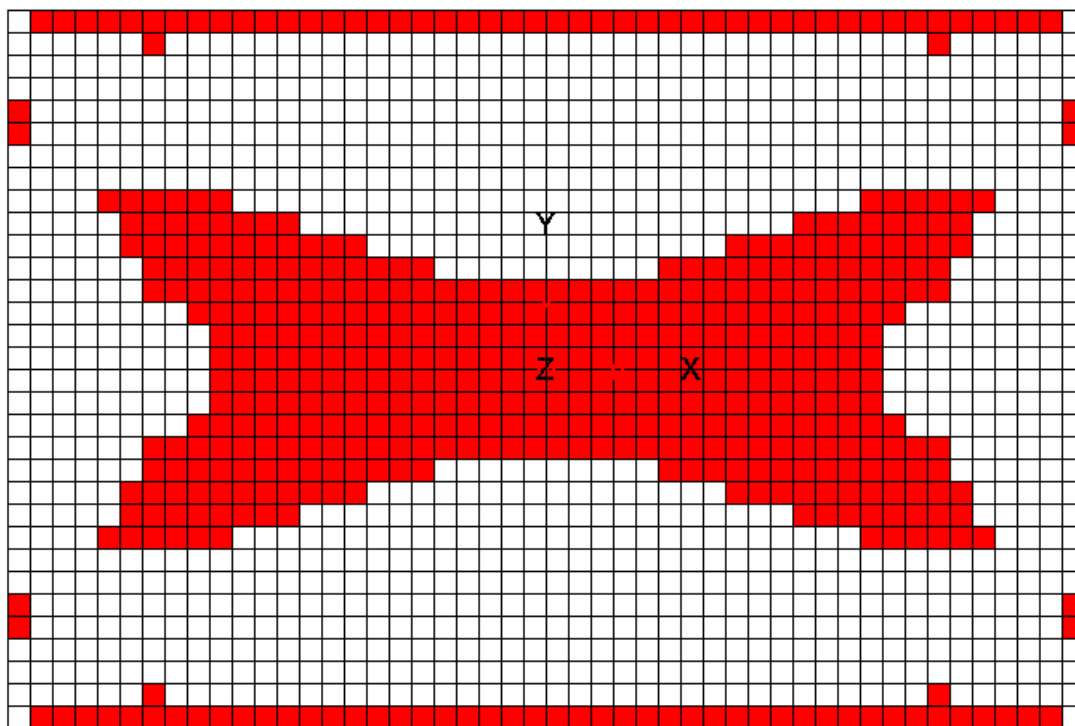


Рис.7.19.2

7.20 Предельное равновесие круглых плит

1. Название задачи. Предельное равновесие круглых плит (рис. 7.20.1). Источник [Ржаницин А.Р. Предельное равновесие пластин и оболочек. -М.:Наука,1989].

2. Формулировка задачи. Для круглой плиты радиусом $R = 1\text{м}$, нагруженной сосредоточенной силой в центре $P = 1\text{кН}$ либо равномерно распределенной вертикальной нагрузкой $q = 1\text{кН}/\text{м}^2$ (рис. 7.20.1) определить предельную нагрузку. Рассмотреть случаи шарнирного опирания и защемления по контуру плит. Предельные моменты $M_{пред} = M'_{пред} = 1\text{кНм}$.

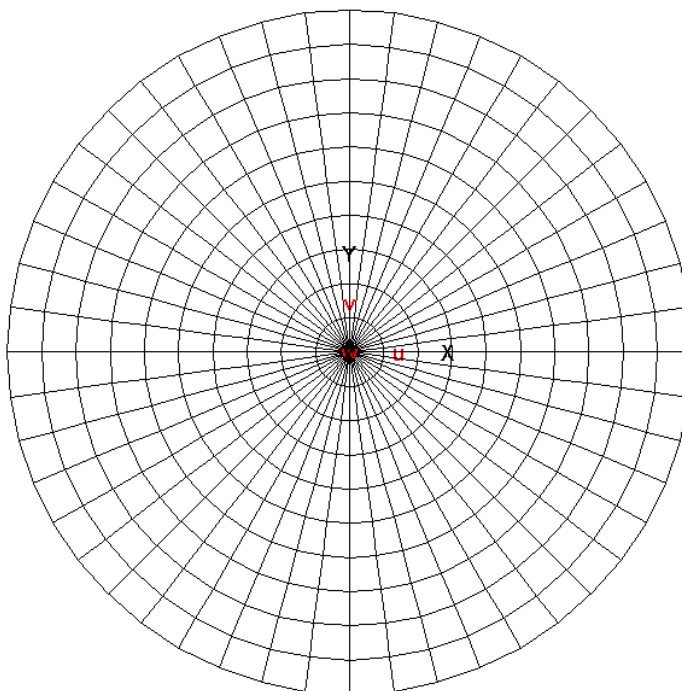


Рис.7.20.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривалась расчетная схема 10x48.

4. Результаты расчета. В таблице 7.20.1 приведены значения параметра предельной нагрузки $p_{пред}$ (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонные значения.

Таблица 7.20.1

	Опираение		Защемление	
	$P_{пред}$	$q_{пред}$	$P_{пред}$	$q_{пред}$
MicroFe	6.69	6.44	10.16	13.37
Эталон	6.28	6.50	12.56	12.00

7.21 Предельное равновесие тонких прямоугольных пластинок

1. Название задачи. Предельное равновесие прямоугольных пластинок нагруженных в своей плоскости (рис. 7.21.1). Источник [Ржаницин А.Р. Предельное равновесие пластин и оболочек.-М.:Наука,1989].

2. Формулировка задачи. Для квадратной ($H = L = 10м$) и прямоугольной (соотношение сторон $H / L = 1 : 2, L = 20м$) пластинок, нагруженных равномерно распределенной вдоль вертикальной оси симметрии вертикальной нагрузкой $q = 1кН / м$ (рис. 7.21.1) определить предельную нагрузку. Приняты следующие условия закрепления – отсутствуют смещения параллельные действующей нагрузке по вертикальным сторонам пластинок. Предельное усилие $N_{пред} = 10кН$, толщина плиты $b = 1м$.

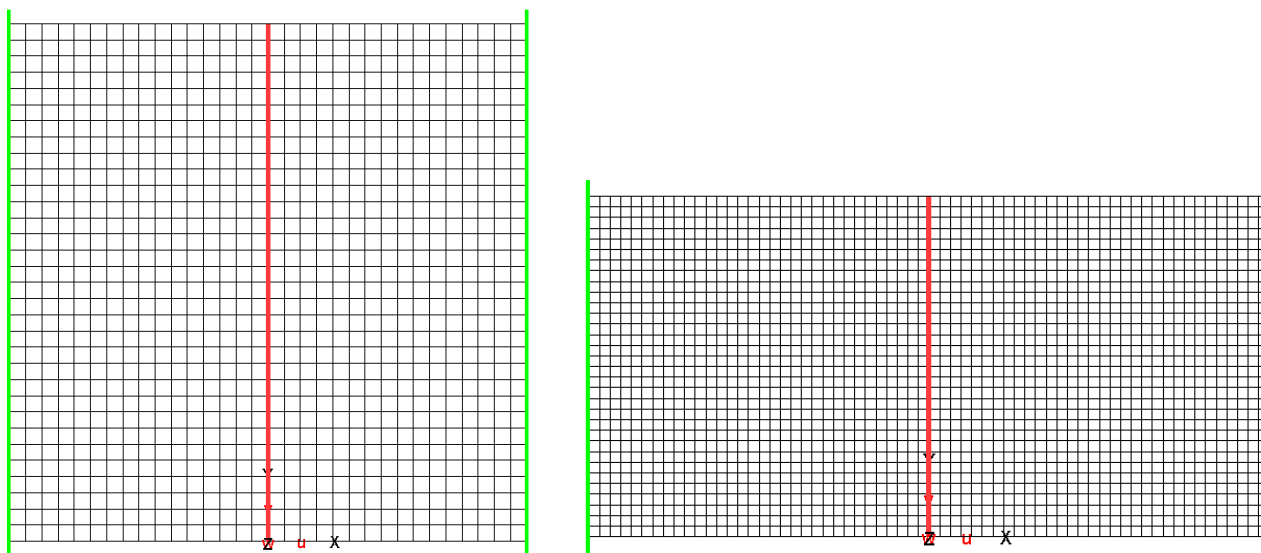


Рис.7.21.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривались расчетные схемы 32x32 и 32x64.

4. Результаты расчета. В таблице 7.21.1 приведены значения параметра предельной нагрузки $\bar{p} = P_{пред} / (\sigma_{пред}bh)$ (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонные значения. На рис. 7.21.2 приведены зоны образования пластических шарниров. При решении использовалось следующее условие текучести

$$(N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3N_{xy}^2) / N_{пред}^2 = 1.$$

Таблица 7.21.1

	$H / L = 1 : 1$		$H / L = 1 : 2$	
	MicroFe	Эталон	MicroFe	Эталон
	0.781	0.817	0.508	0.516

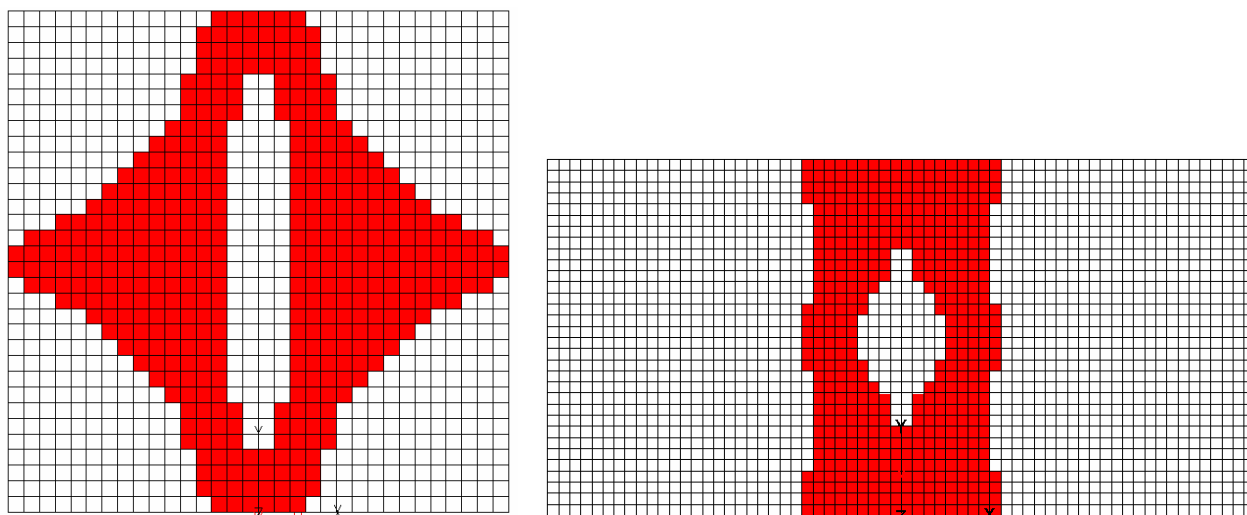
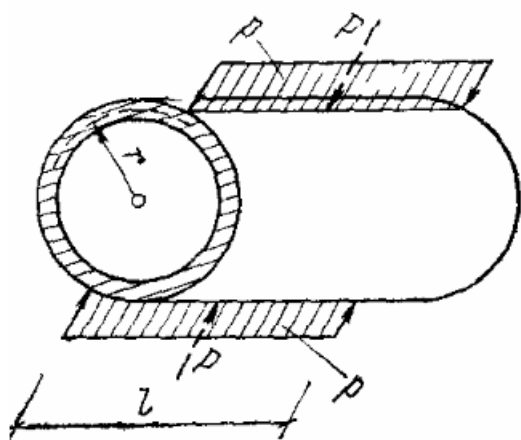


Рис.7.21.2

7.22 Предельное равновесие цилиндрической оболочки

1. Название задачи. Предельное равновесие цилиндрической оболочки (рис. 7.22.1).
 Источник [Тихий М., Ракосник Й. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. -М.: Стройиздат, 1976].

2. Формулировка задачи. Цилиндрическая труба длины $l = 10\text{ м}$, средним радиусом $r = 1\text{ м}$, нагружена равномерно распределенной по противоположным образующим нагрузкой $q = 1\text{ кН/м}$ (рис. 7.22.1). Требуется определить предельную нагрузку. Предельное усилие $M_{\text{пред}} = 1\text{ кНм}$.



Железобетонная труба, подвергающаяся внешнему сжатию

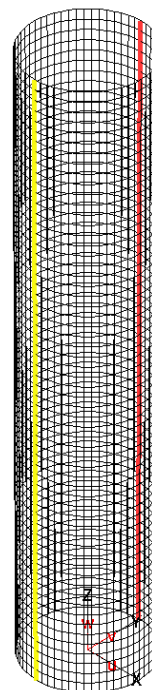


Рис.7.22.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривалась расчетная схема 60x60.

4. Результаты расчета. В таблице 7.22.1 приведены значения параметра предельной нагрузки (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонное значение. Отметим, что эталонное значение соответствует стержневому кольцу. На рис. 7.22.2 приведены зоны образования пластических шарниров.

Таблица 7.22.1

	MicroFe	Эталон
	4.77	4.00

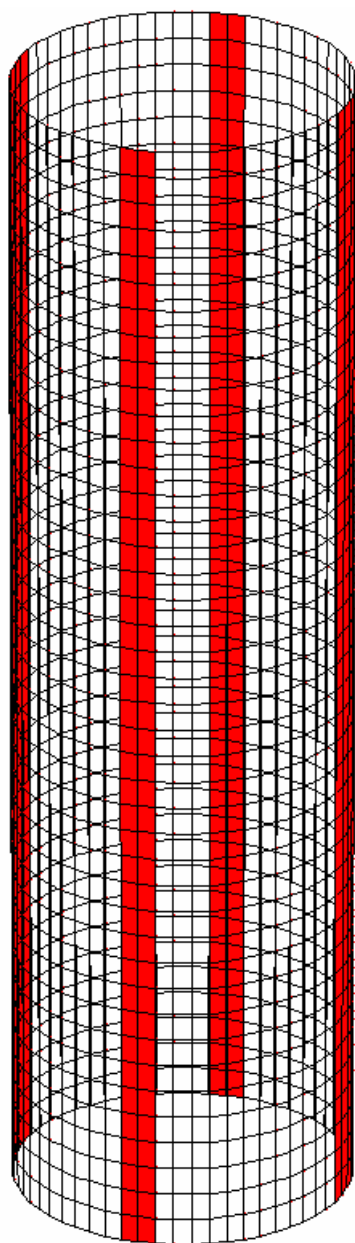


Рис.7.22.2

7.23 Предельное равновесие сферического сегмента

1. Название задачи. Предельное равновесие сферического сегмента (рис. 7.23.1).
 Источник [Каркаускас Р.П., Крутинис А.А., Аткачюнас Ю.Ю., Каланта С.А., Нагавичюс Ю.А. Строительная механика. Программы и решения задач на ЭВМ.- М.: Стройиздат, 1990].

2. Формулировка задачи. Сферическая оболочка, жестко защемленная на опорном контуре и имеющая жесткий диск, на который действует вертикальная сосредоточенная сила (рис. 7.23.1). Средний радиус $R_0 = 10\text{ м}$. Требуется определить предельную нагрузку. Предельное усилие $N_{пред} = 1\text{ кН/м}^2$ постоянно для всего сегмента.

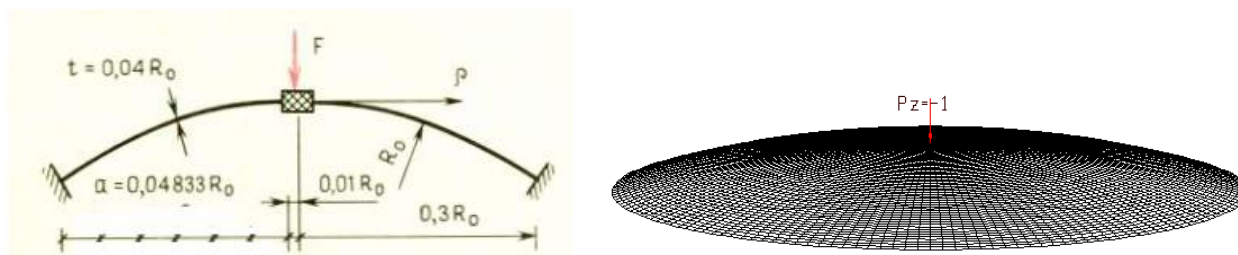


Рис.7.23.1

3. Конечноэлементная модель. Рассматривалась расчетная схема 60x160.

4. Результаты расчета. В таблице 7.23.1 приведены значения параметра предельной нагрузки (предельные нагрузки равны заданным нагрузкам умноженным на значение параметра предельной нагрузки) полученные расчетом по программе и эталонное значение. На рис. 7.23.2 приведены зоны образования пластических шарниров.

Таблица 7.23.1

	MicroFe	Эталон
	0.086	0.082

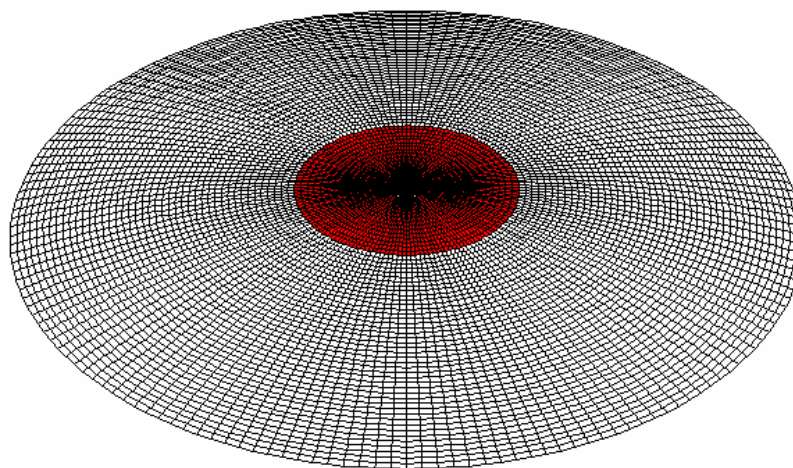


Рис.7.23.2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комплекс программ MicroFe основан на использовании гипотез механики сплошной среды, применение которых, как показывает практика строительства, энергомашиностроения, и других отраслей промышленности позволяет правильно определить напряженно-деформированное состояние, частоты и формы собственных колебаний, динамический отклик и другие параметры сложных пространственных конструкций.

Применяемые в ПК MicroFe математические методы также прошли всестороннюю апробацию, и их использование не вносит в расчет моделей неустранимых погрешностей.

Именно надежность современных программ на основе метода конечных элементов в сочетании с высокой квалификацией расчетчиков позволяют значительно сократить расчетное обоснование сложных инженерных конструкций.

Комплекс программ MicroFe 2009 является очередной версией пакета программ на основе метода конечных элементов, разрабатываемого для выполнения статических и динамических расчетов сложных пространственных систем.

Комплекс может использоваться при расчете:

- * напряженно-деформированного состояния балочных, пластинчатых, оболочечных и массивных конструкций, конструкций с различными сложными связями;
- * частот и форм собственных колебаний;
- * амплитудно-частотных характеристик;
- * динамического отклика конструкций при различных типах возбуждения.

Модульный принцип, положенный в основу комплекса, позволяет оперативно производить его модификацию по расширению области инженерных расчетов.

Комплекс является составной частью системы автоматизированного проектирования Ing+.

Проверка качества используемых в ПК MicroFe 2009 конечных элементов проиллюстрирована специальными тестами (Pathological tests), приведенными в разделе 3. На основе результатов этого тестирования определены оценки качества КЭ (*PTS* - Pathological Tests Score).

$$PTS = \left[1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\sigma_i^* - 1)^2 + (\delta_i^* - 1)^2}{2} \right)^{1/2} \right] \times 100\%,$$

Здесь n – количество испытаний (тестов), σ_i^* , δ_i^* – нормализованные напряжения и перемещения.

Для четырехугольных элементов плоской оболочки используемых в MicroFe на основе тестов из раздела 3 получено $PTS = 93.68\%$ при $n = 232$, а для объемных элементов - $PTS = 81.91\%$ при $n = 58$, что является очень высокими характеристиками элементной базы.

Приведенные в настоящем верификационном отчете тестовые примеры и их сравнение с аналитическим решениями и экспериментальными данными, свидетельствуют о достоверности и точности расчетов, выполняемых с использованием ПК MicroFe.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch.Barth, D.Lutzkanov Moderne finite Elemente fuer Scheiben und Schalen mit Drehfreiheitsgraden. / Bauinformatik 6/95.
2. Hybrid finite elements for analysis of shell structures. V.A.Semenov, P.Yu.Semenov Proceedings international congress ICSS-98. June 22-26, 1998. Vol. 1. Moscow, Russia, 1998
3. В.А. Семенов, П.Ю. Семенов Гибридные конечные элементы и метод подконструкций в задачах строительной механики на собственные значения. В кн.: Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов. Труды XVII Международной конференции, т. III, СПб.:НИИХ СПбГУ, 1999
4. V. A. Semenov, P. Yu. Semenov Geometric Nonlinear and Buckling Analysis of Shell Structures by Finite Element Method., Fourth International Colloquium on Computation of Shell&Spatial Structures. IASS-IACM 2000, Greece, 2000
5. В.А. Семенов, П.Ю. Семенов К геометрически нелинейному расчету пространственных тонкостенных конструкций методом конечных элементов. В кн.: Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов. Труды XVIII Международной конференции, т. III, СПб.:НИИХ СПбГУ, 2000
6. В.А. Семенов, П.Ю. Семенов Элемент оболочки шестью степенями свободы для расчетов с большими перемещениями. В кн.: Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов. Труды XIX Международной конференции, т. III, СПб.:НИИХ СПбГУ, 2001
7. Punch E.F., Atluri S.N. Applications of isoparametric three-dimensional hybrid-stress finite elements with least-order stress fields. Computers and Structures, Vol.19, No 3, 1984
8. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974.
9. Р.Клаф, Дж. Пензиен. Динамика сооружений. - М.: Стройиздат, 1979
10. G.Lumpe. Zur Stabilitaet und Biege-Torsion grosser Verformungen von raemlichen Stabwerken. – Bauingenier, Band 80, 2005
11. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982.
12. Zerna, W., Mungan, I., Steffen, W., Bestimmung der Beulsicherheit von Schalen aus Stahlbeton unter Beruecksichtigung der physikalisch-nichtlinearen Materialeigenschaften, Berlin, 1980, 36 S.

13. Агапов В.П. Применение многослойных конечных элементов для расчета железобетонных плит и оболочек, подкрепленных ребрами жесткости прямоугольного сечения. В сб. Пространственные конструкции зданий и сооружений (исследование, расчет, проектирование, применение), выпуск 9, М., 2004
14. Рутман Ю.Л. Метод псевдожесткостей для решения задач о предельном равновесии жесткопластических конструкций. СПб., БГТУ, 1998.-54с.
- 15 Рутман Ю.Л., Семенов В.А., Лебедев В.Л. Применение метода псевдожесткостей для анализа предельных состояний конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2007, №6
16. Улитин В.В. Физически нелинейный анализ устойчивости конструкций. – СПб.: ГИОРД. – 2007.
17. MacNeal R., Harder R. A proposed standart set of problems to test finite element accuracy. Finite Element Anal. Des., 1987, 1, P.1793-1799.
18. K.Mallikarjuna, U.Shrinivasa A set of pathological tests to validate new finite elements. Sadhana, Vol. 26, Part 6, dezember 2001, P.549-589.
19. Sze K., Chen W., Cheung Y. An efficient quadrilateral plane element with drilling degrees of freedom using orthogonal stress modes. Computers and Structures, Vol. 42, No 5, 1992
20. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982
21. Кантин Д. Смещения криволинейных конечных элементов как жесткого целого// Ракетная техника и космонавтика.- 1970.- Т.8, 7.-с.84-88
22. Lee S.W., Wong S.C., Rhin J.J. Study of nine-node mixed formulation finite element for thin plates and shells// Computers and Structures.- 1985.-V.21, №6.-P.1325-1334
23. Демидов С.П. Теория упругости, М., Высшая школа, 1979.
24. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наук. думка, 1988.
25. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968
26. Расчеты на прочность в машиностроении /Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. В трех томах. Том 1. М.:Машгиз, 1956.
27. P. Dellus. Resistance de materiaux. Paris: Technique et Vulgarisation, 1958.
28. Laredo M. Resistance de materiaux. Paris: Dunod, 1970. P. 77.
29. Beer F.P, Johnston E.R. Vector mechanics for engineers. Statics and Dynamics. New York: McGraw-Hill, 1962. P. 47
30. С.П. Тимошенко. С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1963.

31. Robinson J. Element evaluation. A set of assessment parts and tests, Proceeding of Finite Element Methods in the commercial environment, vol. 1, October 1978.
32. Batoz J.L., Tahar M.B. Evaluation of new quadrilateral thin plate boundary element, International Journal for numerical methods in engineering, vol. 18, Jon Wiley & Sons, 1982.
33. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. Киев: Будівельник. 1973.
34. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности, М., Высшая школа, 1982.
35. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Наука, 1977.
36. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007, стр.238-240.
37. Roark R.J., Young W.C. Formulas for stress and strain. 5th edition. – New York: McGraw Hill, 1975.
38. А.В. Александров, Б.Я.Лашеников, Н.Н.Шапошников. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. - М.: Стройиздат, 1983
39. Kanoknukulchai W., A simple and efficient finite element for general shell analysis. Int. J. Num. Meth. Engng, 1979, Vol.14, pp.179-200.
40. A.R.M. Fam and C. Turkstra, "Model study of horizontally curved box girder", J. Engng Struct. Div., ASCE, 102, st5, 1097-1108 (1976).
41. Лисицын Б.М. Расчет защемленных плит в постановке пространственной теории упругости. –Прикладная механика.– 1970.– т. 6.– вып.5.– с.18-23.
42. Метод конечных элементов в механике твердых тел./ Под редакцией А.С. Сахарова, И Альтенбаха.–Киев.: Вища Школа; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982.–480 с.
43. Novgaard W. Stress in three dimensional pipe-bends. Transactions of ASME, vol. 57, FSP 75–12. PP. 401-416
44. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1, Под ред. В.В. Болотина, изд.2-ое, М., Машиностроение, 1999
45. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. -М.: Машиностроение, 1968.
46. Olson M.D., Lindberg G.M. Vibration analysis of cantilevered curved plates, using a new cylindrical shell finite element., Proc. of 2nd Conf. math. Meth. Struct. Mech., AF base Wright. Petterson, Ohio, 1968
47. Cower G.R., Lindberg G.M., Olson M.D. a shallow shell finite element of triangular shape., Int. J. Solids and Structures, 1970, V.6, N8
48. Грудев И.Д. Колебания криволинейных стержней. М., Изд-во “МИК”, 2007

49. Грудев И.Д. Устойчивость стержневых элементов в составе стальных конструкций. М., Изд-во “МИК”, 2005
50. И.М. Рабинович, А.П. Синицын, О.В. Лужин, Б.М. Теренин. Расчет сооружений на импульсные воздействия. -М.: Стройиздат, 1970.
51. Расчеты на прочность в машиностроении /Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. В трех томах. Том 3. М.:Машгиз, 1959
52. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений). – М.: Изд-во литературы по строительству, 1964.
53. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1949.
54. J. H. Argyris, P. C. Dunne, G. A. Malejannakis, E. Schelkle, A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 11, (1977), 97-131
55. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. - М.: Изд-во АСВ, 2004.
56. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. -М.: Изд-во АСВ, 2000.
57. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. -М.: Наука, 1978
58. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений, Расчетно-теоретический. В 2-х кн. Кн. 1. Под ред. А.А.Уманского. – М., Стройиздат, 1972.
59. Halphen B., Salencon J. Elastoplasticite. Presses de l'ENPC.
60. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. – М.: Мир, 1989. С 367.
61. F.P. Beer, E.R. Johnston, Jr., *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1962, pg. 260, problem 7,8
62. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости- М.: Наука, 1980
63. S.H. Crandall, N.C. Dahl, *An Introduction to the Mechanics of Solids*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1959, pg. 180, ex. 5.1
64. Каркаускас Р.П., Крутинис А.А., Аткачюнас Ю.Ю., Каланта С.А., Нагавичюс Ю.А. Строительная механика. Программы и решения задач на ЭВМ.- М.: Стройиздат, 1990
65. Тихий М., Ракосник Й. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. -М.: Стройиздат, 1976
66. Чирас А.А. Строительная механика. Теория и алгоритмы.- М.: Стройиздат, 1989
67. Ржаницин А.Р. Предельное равновесие пластин и оболочек.-М.:Наука,1989